RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1907.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Le ricerche, che da varî anni vado proseguendo, sulle superficie deformate per flessione delle superficie di secondo grado avevano per iscopo di costruire, per le superficie applicabili sulle *quadriche generali*, una teoria delle trasformazioni perfettamente analoga a quella ben nota delle deformate della sfera reale od immaginaria, cioè delle superficie a curvatura costante positiva o negativa. Ho risoluto dapprima il problema per due classi particolari di quadriche, quella delle quadriche rotonde e quella dei paraboloidi [1]. Col sussidio delle proprietà geometriche osservate in questi casi particolari, ho potuto poi estendere le mie ricerche alle quadriche generali, e in due successive Note: *Sur la déformation des quadriques*, apparse nei Comptes Rendus de l'Académie de Paris [2], ho esposto i principali risultati della mia ricerca.

Ulteriori studî sull'argomento mi hanno recentemente condotto a completare e semplificare quei metodi di trasformazione, per modo che lo scopo a cui miravo può dirsi ormai pienamente raggiunto e la teoria costruita

[1] V. le mie Memorie: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*, Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, t. XIV (1905); *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi*, Annali di matematica, serie 3ª, tomo XII (1906).

[2] T. 142 e 143, 5 mars et 29 octobre 1906.

offre ora il medesimo grado di semplicità e di sviluppo come quella particolare delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante..

Nella presente Nota darò soltanto gli enunciati delle principali proposizioni della nuova teoria, riserbando ad un'ampia Memoria, che sto preparando, gli sviluppi e le dimostrazioni.

2. L'elemento geometrico essenziale per le trasformazioni delle superficie a curvatura costante è fornito, come ben si sa, da una particolare classe di congruenze rettilinee, le cui due falde focali hanno la medesima curvatura costante e sono per ciò applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima sfera. Queste congruenze sono *congruenze* W, cioè sulle loro falde focali si corrispondono le linee asintotiche (i sistemi coniugati). Ma il fatto più importante sul quale si fonda la teoria di queste trasformazioni consiste in ciò che: ogni superficie S di curvatura costante dà luogo ad ∞^2 congruenze della detta specie, di cui S è la prima falda focale; le seconde falde focali S_1 dànno allora le superficie trasformate.

Colla nuova teoria estendiamo questi risultati alle deformate di tutte le quadriche, dimostrando che se alla sfera si sostituisce una qualunque quadrica Q sussistono ancora i medesimi fatti fondamentali, e cioè in primo luogo: esistono infinite congruenze rettilinee W (dipendenti da due funzioni arbitrarie) le cui due falde focali sono applicabili sulla quadrica Q. Precisiamo il grado di arbitrarietà di queste congruenze col seguente teorema fondamentale:

Teorema A). *Ogni superficie* S *applicabile sopra una quadrica* Q *appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee* W, *le cui seconde falde focali* S_1 *sono applicabili sulla medesima quadrica* Q.

Il passaggio dalla deformata iniziale S della quadrica Q ad una qualunque delle nuove S_1 dà una delle ∞^2 *trasformazioni* della S che noi consideriamo.

3. Nelle trasformazioni di una data deformata S della quadrica fondamentale Q entrano, come si è detto, *due costanti arbitrarie*, che conviene innanzi tutto interpretare geometricamente. La prima di esse ha un significato ben notevole, che riconosciamo nel modo seguente. Prendiamo una delle nostre congruenze W, colle falde focali S, S_1 applicabili sulla quadrica Q, e consideriamo sopra S, S_1 le infinite coppie di punti corrispondenti F, F_1, che sono i punti (fuochi) ove i raggi della congruenza toccano S, S_1. Immaginiamo che la superficie S si fletta trasportando seco, invariabilmente legati, i segmenti tangenti FF_1, e deformiamo la S sino ad applicarla sulla quadrica Q. Abbiamo allora il semplice e fondamentale risultato:

I termini F_1 *dei segmenti* FF_1, *così trasportati sulla quadrica* Q, *si dispongono sopra una seconda quadrica* Q_1 *omofocale a* Q, *che forma il loro luogo.*

Dipendentemente dalla *prima* costante della trasformazione, la quadrica Q_1 può occupare una qualunque posizione nel detto sistema confocale. Per questa prima costante si può dunque assumere, come faremo, precisamente il parametro k, col quale individuiamo la quadrica Q_1 nel sistema; la nostra trasformazione sarà indicata corrispondentemente col simbolo B_k.

Per un assegnato valore di k la trasformazione B_k fa nascere dalla superficie iniziale S una semplice infinità di superficie trasformate S_1. Per trovare effettivamente queste ∞^1 trasformate S_1 abbiamo da integrare una equazione differenziale del tipo di Riccati, nei cui coefficienti entra già la prima costante k.

La *seconda* costante viene introdotta dalla integrazione e, disponendo di questa, potremo fissare ad arbitrio, per un punto iniziale F della S, la direzione del raggio FF_1 della congruenza. Si disporrà insieme delle due costanti fissando (ad arbitrio), nel piano tangente in un punto iniziale F alla S, il segmento focale FF_1, in grandezza ed orientazione.

È da notarsi poi che *le nostre trasformazioni* B_k *esistono sempre anche per quei particolari valori di k che riducono la quadrica confocale* Q_1 *ad uno dei piani principali* (*contato due volte*). È questo un caso particolare ben notevole delle trasformazioni B_k.

4. Il presentarsi di un'equazione di Riccati nel nostro problema d'integrazione corrisponde ad una proprietà geometrica, che occorre approfondire.

Se consideriamo le ∞^1 trasformate S_1 della superficie iniziale S per mezzo della trasformazione B_k, la semplice infinità di punti F_1 delle S_1, che corrispondono ad un determinato punto F di S, formano, nel piano tangente di S in F, una linea luogo. Basta ricordare quanto abbiamo detto sopra per riconoscere che questo luogo è una conica C; così abbiamo in ciascuno degli ∞^2 piani tangenti di S una conica C, la cui forma e giacitura nel piano tangente sono invariabilmente legate alla S nelle sue flessioni e: *quando la* S *si distende sulla quadrica* Q, *seco trasportando le* ∞^2 *coniche* C, *queste diventano le sezioni prodotte dai piani tangenti di* Q *nella quadrica confocale* Q_1.

Ciò premesso, la interpretazione geometrica della equazione di Riccati risulta dal teorema seguente:

Le ∞^1 *superficie* S_1, *trasformate della iniziale* S, *segnano sopra le coniche* C, *tracciate nei piani tangenti di* S, *serie proiettive di punti.*

Basta quindi introdurre come incognita il parametro t da cui dipendono razionalmente le coordinate di un punto mobile sulla conica C e l'equazione (ai differenziali totali) per determinare il valore di t al punto d'incontro di S_1 colla conica C assume conseguentemente la forma di Riccati.

Corrispondentemente poi a quanto abbiamo notato alla fine del numero precedente, rispetto alle singolari trasformazioni B_k per le quali la quadrica confocale Q_1 si riduce ad un piano principale, è da osservarsi che: *in questo*

caso le coniche C *si riducono alle rette d'intersezione dei piani tangenti della quadrica* Q *col piano principale, e le* ∞^1 *superficie* S_1 *trasformate segano queste rette in punteggiate proiettive.*

5. Arriviamo ora ad una nuova e notevole proprietà geometrica, che dà la *legge di applicabilità* l'una sull'altra delle due falde focali S, S_1 di una delle nostre congruenze.

Abbiamo già osservato, al n. 3, che allorquando la prima falda S assume per flessione la forma della quadrica Q, seco trasportando i segmenti tangenti FF_1, i termini F_1 di questi si dispongono sulla quadrica confocale Q_1. Così dalla applicabilità di S sopra Q resta fissata una corrispondenza fra i punti F_1 della seconda falda S_1 ed i punti M_1 della quadrica confocale Q_1. D'altra parte, essendo la S_1 applicabile alla sua volta sopra la quadrica Q, ad ogni punto F_1 di S_1 corrisponde in questa applicabilità, un determinato punto M di Q. La ricerca della legge di applicabilità delle due falde focali S, S_1 l'una sull'altra si riporta dunque a quella della legge di corrispondenza fra i punti M, M_1 delle due quadriche confocali Q, Q_1. Ora vi ha una legge, per così dire naturale, di corrispondenza fra i punti di due quadriche confocali: quella data dal teorema di Ivory che trasforma con una proiettività affine l'una quadrica nell'altra, e che noi chiameremo *l'affinità di Ivory* (vedi p. es. *Encyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. III_2, Heft 2, n. 62) (1). E noi troviamo questo semplice ed importante risultato:

La legge di applicabilità delle due falde focali S, S_1 *di una delle nostre congruenze è data dalla affinità di Ivory fra le due quadriche confocali* Q, Q_1.

(1) Se Q, Q_1 sono quadriche a centro di rispettive equazioni

$$Q) \quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

$$Q_1) \quad \frac{x_1^2}{A+k}+\frac{y_1^2}{B+k}+\frac{z_1^2}{C+k}=1,$$

le formole dell'affinità di Ivory sono semplicemente:

$$x_1 = x\sqrt{\frac{A+k}{A}}, \quad y_1 = y\sqrt{\frac{B+k}{B}}, \quad z_1 = z\sqrt{\frac{C+k}{C}}.$$

Se si tratta dei due paraboloidi confocali

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \\ \frac{x_1^2}{p+k}+\frac{y_1^2}{q+k}=2z_1-k, \end{cases}$$

abbiamo invece

$$x_1 = x\sqrt{\frac{p+k}{p}}, \quad y_1 = y\sqrt{\frac{q+k}{q}}, \quad z_1 = z+\frac{k}{2}.$$

6. Un'altra proprietà della corrispondenza fra i punti delle due falde focali S, S_1 risulta dal considerare quel sistema coniugato di S che si conserva coniugato quando S si applica sulla quadrica Q, e l'analogo sistema coniugato permanente di S_1 nell'applicabilità sopra Q stessa. Si è visto che la corrispondenza fra S, S_1 conserva i sistemi coniugati; ma di più abbiamo il teorema:

Al sistema coniugato comune ad S *e alla quadrica applicabile* Q *corrisponde sopra* S_1 *il sistema coniugato comune ad* S_1, Q.

Per teoremi dovuti a Darboux e Servant, questo sistema coniugato comune sopra S, come sopra S_1, è un sistema *isotermo-coniugato* (eccettuato il caso che S, S_1 siano rigate).

Fermiamoci un momento a considerare cosa diventano i teoremi del numero precedente, e dell'attuale, nel caso particolare delle superficie a curvatura costante. La legge di applicabilità, data dalla affinità di Ivory, si converte nella relazione d'applicabilità delle due falde di una congruenza pseudosferica, secondo la quale ogni punto F della prima falda S, applicando S sulla seconda falda S_1, si trasporta a distanza geodetica costante dal punto corrispondente F_1 di S_1 (1).

Quanto all'altro teorema della conservazione dei sistemi coniugati permanenti nelle rispettive applicabilità di S, S_1 sopra Q, si muta quando Q diventa una sfera, nella proprietà della corrispondenza delle linee di curvatura sulle due falde della congruenza.

7. Ritorniamo alle trasformazioni generali B_k delle superficie applicabili sulla quadrica Q.

Per trovare effettivamente le ∞^1 trasformate S_1 abbiamo da integrare un'equazione di Riccati, della quale adunque basta conoscere una soluzione particolare per compiere l'integrazione con quadrature. Dopo ciò, siccome di ciascuna S_1 conosciamo già *una* trasformata, l'iniziale S, non occorrono più altro che quadrature per proseguire illimitatamente nelle nostre trasformazioni.

Ma anche qui, come per le superficie a curvatura costante, possiamo perfezionare ulteriormente il metodo e risparmiare le quadrature, appoggiandoci sul seguente teorema:

Teorema B). *Se da una superficie* S *applicabile sulla quadrica* Q *si sono dedotte due nuove superficie* S_1, S_2, *applicabili sulla medesima quadrica, mediante due trasformazioni* B_{k_1}, B_{k_2} *corrispondenti a due costanti* k_1, k_2 *differenti* (*ossia a due distinte quadriche* Q_1, Q_2 *del sistema confocale*), *esiste una quarta superficie* S' *della medesima natura, perfettamente determinata, che è legata alle due stesse* S_1, S_2 *da due altre trasformazioni* B'_{k_2}, B'_{k_1} *colle costanti* k_1, k_2 *permutate. Questa quarta super-*

(1) V. le mie *Lezioni di geometria differenziale* (2ª edizione, t. II, pag. 409).

ficie S', *note che siano le tre* S, S_1, S_2, *si trova in termini finiti senza calcoli d'integrazione.*

Da questo teorema, che diciamo il *teorema di permutabilità*, segue che basta avere integrato completamente, per un valore arbitrario di k, la prima equazione di Riccati che si presenta nell'applicazione del metodo di trasformazione, e tutte le seguenti equazioni di Riccati saranno senz'altro insieme integrate, senza che più occorra alcuna quadratura.

8. Fra le deformate delle quadriche meritano particolare menzione le *deformate rigate*. Attualmente, per restare al caso reale, supporremo che la quadrica fondamentale Q sia essa stessa rigata e si tratti dunque o di un paraboloide iperbolico, o di un iperboloide ad una falda. In primo luogo abbiamo che, se la deformata S della quadrica Q è una rigata R, anche tutte le superficie trasformate S_1, per una qualunque B_k, saranno altrettante rigate R_1. La costruzione delle ∞^1 trasformate rigate R_1 di una rigata R, applicabile sopra Q, assume allora una forma particolarmente espressiva data dal teorema seguente:

Se la quadrica Q *rotola sopra una qualunque sua deformata rigata* R, *seco trasportando rigidamente connessa la quadrica confocale* Q_1, *le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) di* Q_1 *generano una congruenza* Γ, *entro cui esistono* ∞^1 *superficie rigate* R_1, *perfettamente determinate, ciascuna delle quali forma con* R *le due falde focali di una congruenza* W. *Queste nuove rigate* R_1 *sono alla loro volta applicabili sulla medesima quadrica* Q, *e danno le* ∞^1 *trasformate della* R *per la trasformazione* B_k *corrispondente alla quadrica confocale* Q_1.

Qui notiamo ancora tre casi particolari.

Se si fa coincidere Q_1 con Q, si deve prendere per congruenza Γ la congruenza (normale) delle tangenti a quelle geodetiche curvilinee di R che corrispondono alle generatrici di Q dell'altro sistema. In questo caso si ottengono le rigate R_1, associando quelle tangenti lungo le singole asintotiche curvilinee di R. E in effetto, per un teorema generale dovuto al dottore Chieffi [1], questo rigate R_1 sono applicabili sulla quadrica Q.

Un secondo caso particolare notevole si ottiene prendendo per Q un iperboloide (rigato) rotondo. Si sa allora che sopra ciascuna deformata rigata R di Q il circolo di gola dell'iperboloide diventa una curva di Bertrand. Le nostre trasformazioni diventano per le curve di Bertrand quelle trasformazioni che, trovate in un caso particolare da Demartres, furono poi considerate in generale da Razzaboni [2].

[1] *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda*, Giornale di matematiche, serie 2ª, t. 12 (v. n. 1).

[2] Cfr. la mia prima Memoria citata, §§ 22-24.

Supponiamo infine di ridurre la quadrica Q_1 ad un piano principale (n. 3); le sue generatrici diventano allora le tangenti della corrispondente conica focale e si ha il teorema: *Se la quadrica* Q *rotola sopra una sua deformata rigata* R, *le tangenti di una conica focale di* Q, *trasportata da* Q *nel rotolamento, generano una congruenza che contiene le* ∞^1 *trasformate rigate* R_1 *della* R *per quella* B_k *che corrisponde a ridurre la quadrica confocale* Q_1 *al piano (principale) della conica.*

9. Ritorniamo ancora alle trasformazioni B_k delle generali deformate S della quadrica Q che supporremo, come nel numero precedente, a generatrici reali affinchè siano reali le asintotiche sulle deformate S. Vogliamo segnalare alcune notevoli proprietà, dalle quali risulterà come le trasformazioni B_k possano anche riguardarsi quali trasformazioni di singole curve, cioè delle asintotiche delle superficie applicabili sulle quadriche.

Fissiamo sulla superficie iniziale S una qualunque sua asintotica a e, scelto un punto F di a, fissiamo ancora il segmento focale FF_1, che giacerà nel piano osculatore di a. Teniamo allora fissa la linea asintotica a ed il segmento FF_1 e deformiamo in modo continuo la superficie S attorno alla asintotica rigida a [1]; quella trasformazione B_k della S che è individuata dal segmento fissato FF_1 cangierà la S, in ogni sua configurazione, in una determinata trasformata S_1. Abbiamo allora il teorema: *Se la superficie* S *si deforma attorno alla asintotica rigida* a, *resterà fissa altresì la asintotica corrispondente* a_1 *sulla superficie trasformata* S_1, *e questa si deformerà a sua volta attorno alla asintotica rigida* a_1.

La nuova curva a_1 viene così a dipendere unicamente dalla primitiva a, e dal segmento FF_1, fissato nel piano osculatore di a nel punto iniziale F. Ne segue appunto che possiamo risolvere le nostre trasformazioni di superficie in trasformazioni delle loro singole asintotiche, precisamente come S. Lie ha risoluto le trasformazioni delle superficie pseudosferiche in quelle delle curve a torsione costante che ne sono le linee asintotiche.

10. Dal teorema superiore deduciamo un'altra conseguenza importante. Fra le deformate della S che lasciano rigida la linea asintotica a ve ne sono due, perfettamente determinate, che convertono la S in una superficie rigata. Queste due rigate corrispondono ai due sistemi di generatrici di Q e si ottengono (pel teorema di Chieffi) conducendo nei punti della asintotica a le tangenti alle geodetiche di S trasformate delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema di Q. Abbiamo dunque il teorema:

Se sulle due falde focali S, S_1 *di una delle nostre congruenze si considerano due asintotiche corrispondenti* a, a_1, *e nei punti di queste si*

[1] Si sa che le linee asintotiche di una superficie possiedono la proprietà di essere *linee di piegamento*, cioè intorno ad una di esse mantenuta rigida si può flettere la superficie. Queste flessioni con asintotica rigida dipendono da una funzione arbitraria.

tirano le tangenti alle geodetiche di S *trasformate delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema di* Q, *le due rigate* R, R_1, *che si formano, sono nuovamente le due falde focali di una congruenza* W, *ed applicabili sulla quadrica* Q.

Con questa costruzione, note che siano le linee asintotiche delle due falde focali S, S_1, si deducono in termini finiti due serie di ∞^1 altre congruenze della medesima specie, con falde focali rigate.

È da notarsi che il teorema superiore vale ancora se le due falde focali S, S_1 sono esse stesse rigate, purchè la costruzione si faccia rispetto alle geodetiche corrispondenti a quelle generatrici di Q che hanno perduto sopra S, S_1 la loro forma rettilinea.

11. Le nostre trasformazioni B_k si applicano a tutte quelle superficie il quadrato del cui elemento lineare è riducibile al ds^2 di una quadrica reale od immaginaria. E, se pure ci limitiamo a considerare fra queste superficie soltanto le *reali*, ne abbiamo parecchie classi le cui quadriche corrispondenti sono immaginarie. Così p. es. esistono trasformazioni B_k reali per la classe di superficie reali applicabili sull'*ellisoide immaginario*.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0\,.$$

In particolare quando $a=b=c$, queste superficie sono le pseudosferiche di curvatura

$$K=-\frac{1}{a^2}\,,$$

e le corrispondenti B_k diventano le trasformazioni di Bäcklund.

Ma consideriamo ora particolarmente il caso che la quadrica fondamentale Q sia *reale*. Allora le trasformazioni reali B_k delle deformate reali di Q si ottengono assumendo per quadrica confocale Q_1 del n. 3 una quadrica rigata. Ne risulta che se la quadrica Q è essa stessa rigata, l'affinità di Ivory (n. 5) fa corrispondere ai punti reali di Q_1 punti reali di Q, e le due falde focali S, S_1 delle nostre congruenze sono in realtà applicabili l'una sull'altra, per le loro regioni reali. Quando invece la quadrica Q è a punti ellittici, la corrispondenza di Ivory trasforma la regione reale di Q_1 in una immaginaria di Q; i due elementi lineari di S, S_1 sono sempre analiticamente equivalenti, ma la regione reale di S corrisponde ad una ideale di S_1. Diremo nel primo caso che l'applicabilità di S sopra S_1 è *reale*, nel secondo *ideale*.

Abbiamo dunque: *Se la quadrica fondamentale* Q *è a punti iperbolici* (*paraboloide iperbolico, iperboloide ad una falda*) *l'applicabilità delle due falde focali* S, S_1 *di una delle nostre congruenze è reale; se invece* Q

è a punti ellittici (paraboloide ellittico, ellissoide, iperboloide a due falde) la loro applicabilità è soltanto ideale.

In quest'ultimo caso, per ottenere dalla superficie iniziale S superficie derivate applicabili *realmente* sopra S, conviene eseguire un numero pari di trasformazioni.

Supponiamo ora in particolare che la quadrica Q sia rotonda. Nel sistema confocale determinato da Q vi sono effettive quadriche rigate solo quando Q è un iperboloide ad una falda o un ellissoide schiacciato, mentre per le altre tre forme rotonde (paraboloide, ellissoide allungato, iperboloide a due falde) le quadriche rigate del sistema confocale si riducono ai piani per l'asse e le trasformazioni reali corrispondenti spariscono. Ne risulta che: *per le quadriche rotonde (reali) si hanno trasformazioni* B_k *reali solo per le due forme dell'ellissoide schiacciato e dell'iperboloide ad una falda; per le altre tre forme le trasformazioni sono soltanto immaginarie.*

Questi risultati sono in perfetto accordo con quelli già da me stabiliti con ricerca diretta nelle due Memorie citate.

12. Veniamo da ultimo a parlare di un'altra trasformazione delle deformate delle quadriche, di natura ben diversa dalle trasformazioni B_k fin qui considerate; quest'altra trasformazione è involutoria ed assimilabile sotto molti rapporti alla *trasformazione di Hazzidakis* per le superficie a curvatura costante positiva.

Secondo quanto ho dimostrato in una mia Nota dell'aprile 1903, inserita in questi Rendiconti, ad una quadrica generale Q ne corrisponde un altra $\overline{Q}$, determinata a meno di un'omotetia, *coniugata in deformazione* della Q. Le due quadriche $Q, \overline{Q}$, che possono assumersi nello stesso sistema confocale, si corrispondono in una *proiettività* che conserva (oltre ai sistemi coniugati) le linee geodetiche. Ne segue (loc. cit.) che ad ogni sistema di linee asintotiche *virtuali* sopra Q corrisponde un analogo sistema sopra $\overline{Q}$, talchè ogni deformata S di Q ne individua una $\overline{S}$ di $\overline{Q}$, corrispondendosi ancora sopra $S, \overline{S}$ i sistemi coniugati e le geodetiche.

Nel passaggio dalla deformata S di Q all'altra deformata $\overline{S}$ di $\overline{Q}$ consiste la trasformazione involutoria che dobbiamo ora considerare, e che indichiamo col simbolo H; le due superficie $S, \overline{S}$ si diranno anche *coniugate in deformazione.*

La trasformazione involutoria H delle deformate delle quadriche ha a comune colle trasformazioni B_k le proprietà segnalate ai nn. 9 e 10; e cioè:

1°. *Se la superficie* S *si deforma attorno ad una sua asintotica rigida* a, *la sua coniugata in deformazione* $\overline{S}$ *si deforma similmente attorno alla corrispondente asintotica rigida* $\overline{a}$.

2°. *Se alle due superficie* $S, \overline{S}$ *coniugate in deformazione si circoscrivono lungo due linee asintotiche corrispondenti* $a, \overline{a}$ *le rigate* $R, \overline{R}$

formate dalle tangenti alle deformate delle rispettive generatrici delle quadriche $Q, \overline{Q}$, *queste due rigate* $R, \overline{R}$ *sono nuovamente coniugate in deformazione.*

Ma la proprietà più interessante della trasformazione involutoria H si ottiene dal paragone colle trasformazioni B_k ed è data dal teorema seguente, che dimostra in sostanza la *permutabilità* della trasformazione H colle B_k:

Se S, S_1 *sono due deformate della quadrica* Q, *trasformate l'una dall'altra per una* B_k, *le due loro coniugate in deformazione* $\overline{S}, \overline{S}_1$ *possono collocarsi in tale posizione dello spazio da formare, alla loro volta, le due falde focali di una congruenza* W, *onde* $\overline{S}, \overline{S}_1$ *sono trasformate l'una dell'altra per una* $B_{\overline{k}}$. *La seconda congruenza si deduce dalla prima semplicemente conducendo pei punti di* $\overline{S}$ *le tangenti nelle direzioni corrispondenti a quelle dei raggi della congruenza primitiva.*

A causa di queste proprietà, quando si applicano le trasformazioni B_k alle deformate S delle quadriche conviene sempre associare alla S la coniugata in deformazione $\overline{S}$, poichè dalle trasformazioni dell'una si hanno senz'altro le trasformazioni dell'altra, e le nuove superficie sono ancora coniugate in deformazione. Così si passa dalle trasformazioni delle superficie applicabili sopra un iperboloide rigato a quelle delle deformate di un altro iperboloide rigato, e similmente da quelle relative ad un ellissoide a quelle delle deformate dell'iperboloide a due falde coniugato in deformazione.

Da ultimo osserverò che si possono considerare coppie $S, \overline{S}$ di superficie coniugate in deformazione non solo appartenenti allo stesso spazio euclideo, ma anche immerse l'una in uno spazio di curvatura costante, l'altra in un altro spazio di curvatura ancora costante, ma differente. In particolare alle deformate delle quadriche nello spazio euclideo sono coniugate in deformazione, nello spazio di curvatura costante positiva o negativa, ancora delle superficie applicabili su quadriche di questi spazî. E siccome i teoremi superiori continuano sempre a sussistere, ne risulta che: *la nostra teoria delle trasformazioni per le superficie applicabili sulle quadriche nello spazio euclideo vale più in generale per le deformate delle quadriche negli spazî di curvatura costante.*

Astronomia. — *Osservazioni della nuova cometa 1907 b Mellish fatte all'equatoriale di 37 cm. del R. Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

La cometa fu scoperta a Madison il 14 aprile. L'astro è una debole nebulosità con accenno di condensazione nucleare. Le osservazioni al micrometro filare furono estremamente difficili. Oggidì non conosco in Europa

che le osservazioni di Nizza. Tra breve periodo l'astro non potrà essere seguito che coi grandissimi rifrattori.

Al Collegio Romano si poterono fare appena quattro posizioni, due dal dott. E. Bianchi, una dal dott. G. Zappa ed una da me; esse sono le seguenti:

1907 Aprile 16	$8^h22^m\ 6^s$ R.C.R.
α apparente cometa	$7^h\ 0^m17^s.47$ (9.505)
δ » » +	$17°19'12''.8$ (0.621)
1907 Maggio 2	$11^h56^m39^s$ R.C.R.
α apparente cometa	$8^h22^m47^s.15$ (9.794)
δ » » +	$45°30'12''.9$ (0.671)
1907 Maggio 4	$8^h36^m42^s$ R.C.R.
α apparente cometa	$8^h27^m31^s.36$ (9.643)
δ » » +	$46°27'\ 8''.4$ (9.876)
1907 Maggio 4	$9^h43^m23^s$ R.C.R.
α apparente cometa	$8^h27^m38.^s77$ (9.742)
δ » » +	$46°28'16''.8$ (0.227)

La cometa ebbe un moto geocentrico fortissimo verso il 10 aprile, poichè a quella data la distanza dalla terra discese fino a 31 milioni di chilometri.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite all'isola di Ponza ed a Monte Circeo nel 1905.* Nota del Corrispondente V. Reina.

Stazione all' isola di Ponza.

Il segnale trigonometrico è costituito dall'asse dell'albero di segnalazione del Semaforo, sorgente nel punto più elevato dell' isola (280^m, suolo). Il pilastro d'osservazione venne costruito sulla spianata circostante al Semaforo e collegato al centro trigonometrico in doppio modo. Le sue coordinate polari rispetto al centro risultarono

$$e = 26^m.475 \qquad \alpha = 262°.24'.$$

Le operazioni durarono dal 12 al 23 luglio 1905, interrotte alcune notti da forte vento. Esse furono però grandemente facilitate dal permesso accordatomi dal Ministero della Marina di alloggiare nel Semaforo. Per tale concessione esprimo i miei vivi ringraziamenti.

Determinazione della latitudine. — I risultati dedotti dalla osservazione dei passaggi meridiani di 60 stelle del B. A. J., divise in gruppi di 10 stelle ciascuno, sono riassunti nel seguente specchio:

Gruppi	Posizioni del Cerchio zenitale						Medie	Numero delle osservazioni
	0°	45°	90°	135°	180°	180°		
	40°.52′							
I	55″.79 (4)	55.″95	56″.00 (1)	55″.90	55″.86	56″.14	40°.52′.55″.94	58
II	56. 12	56. 37 (3)	56. 27	55. 21	54. 44	—	55. 62	46
III	54. 99	56. 89	56. 26	54. 94 (4)	56. 30	56. 08	55. 93	51
IV	55. 35	56. 84	56. 19	57. 13	55. 85	—	56. 27	50
V	55. 96	55. 99	56. 51	56. 48	56. 74 (3)	—	56. 30	46
VI	54. 92 (2)	56. 48	56. 09	55. 68	55. 25 (1)	—	55. 72	46
Medie	55. 54	56. 39	56. 23	55. 98	55. 67	56. 11	40. 52. 55. 95	297

Se alla latitudine finale del pilastro d'osservazione

$$\varphi = 40°.52'.55''.95$$

si applica la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = + 0''.11$$

si ottiene per la latitudine di Ponza (centro), come risultato di 297 osservazioni meridiane di 60 stelle fondamentali,

$$\varphi = \mathbf{40°.52'.56''.06} \qquad m = 0''.11$$

(Epoca 1905. 54).

Determinazione dell'azimut della direzione Ponza-M. Circeo. — L'apparato diottrico, fungente da mira notturna, venne collocato sulla terrazza del Semaforo di M. Circeo (455^m), alla distanza di 39556^m. La quota dello strumento universale essendo di 281^m, la distanza zenitale della mira risultò di 89°.55′.

Le correzioni del cronometro d'osservazione Kullberg, determinate col metodo di Döllen, furono le seguenti:

15	luglio	1905	a $15^h.27^m$	$+ 1^m.57^s.72$
16	»		17. 44	1. 59. 22
17	»		23. 54	2. 00. 38
18	»		23. 02	2. 01. 10
20	»		24. 05	2. 02. 10
21	»		23. 35	2. 02. 51
23	»		19. 20	2. 03. 35

I valori dell'azimut della mira risultanti dalle diverse serie (costituite ciascuna da quattro determinazioni singole) sono qui riassunti.

(1) Peso 9, (2) peso 8, (3) peso 6, (4) peso 5.

Data	Posizione del Cerchio	A	c_m	c_*	$c_m - c_*$	Espressioni differenziali
1905						
16 luglio	0°	13°.48′.27″.23	— 3″.0	— 5″.8	+ 2″.8	$dA = -0.33\,d\alpha - 0.79\,d\delta + 0.01\,d\varphi$
18 »	»	27. 52	7. 1	6. 4	- 0. 7	— 0.31 — 0.66 + 0.02
»	»	26. 68	6. 3	6. 3	0. 0	— 0.26 — 1.01 + 0.02
»	30	26. 11	5. 7	5. 4	— 0. 3	— 0.20 — 1.15 + 0.02
»	»	27. 36	5. 8	5. 2	— 0. 6	— 0.13 — 1.24 + 0.02
»	60	30. 02	5. 5	6. 0	+ 0. 5	+ 0.01 — 1.33 + 0,02
»	»	31. 26	5. 2	5. 8	+ 0. 6	+ 0.08 — 1.32 + 0.02
»	90	28. 39	5. 1	5. 3	+ 0. 2	+ 0.16 — 1.23 + 0.02
»	»	26. 91	5. 2	5. 8	+ 0. 6	+ 0.23 — 1.13 + 0.02
20 »	120	25. 82	6. 5	5. 2	— 1. 3	+ 0.09 — 1.30 + 0.02
»	»	28. 67	6. 4	5. 8	— 0. 4	+ 0.16 — 1.24 + 0.02
»	150	28. 11	6. 0	5. 6	— 0. 4	+ 0.23 — 1.12 + 0.02
»	»	28. 88	6. 9	6. 6	— 0. 3	+ 0.27 — 1.02 + 0.02
»	165	31. 83	3. 6	5. 9	+ 2. 3	+ 0.35 — 0.77 + 0.01
21 »	»	30. 76	4. 6	6. 4	+ 1. 8	— 0.26 — 1.02 + 0.02
»	195	29. 17	4. 5	5. 6	+ 1. 1	— 0.21 — 1.14 + 0.02
»	»	29. 33	4. 6	6. 0	+ 1. 4	— 0.06 — 1.31 + 0.02
»	225	29. 23	5. 4	6. 0	+ 0. 6	+ 0.03 — 1.31 + 0.02
»	»	29. 01	5. 0	6. 4	+ 1. 4	+ 0.09 — 1.30 + 0.02
»	255	27. 64	5. 3	6. 4	+ 1. 1	+ 0.16 — 1.24 + 0.02
»	»	29. 29	6. 1	5. 9	— 0. 2	+ 0.21 — 1.15 + 0.02
»	285	30. 66	5. 2	6. 4	+ 1. 2	+ 0.28 — 1.00 + 0.02
»	»	29. 11	6. 2	7. 0	+ 0. 8	+ 0.33 — 0.85 + 0.01
22	315	28. 43	5. 4	6. 4	+ 1. 0	— 0.25 — 1.04 + 0.02
»	»	27. 12	4. 8	6. 2	+ 1. 4	— 0.17 — 1.19 + 0.02
»	345	30. 39	5. 9	6. 4	+ 0. 5	— 0.10 — 1.28 + 0.02

Il cannocchiale fu invertito sui cuscinetti a metà delle operazioni.
Se alla media dei valori della terza colonna

$$A = 13°.48'.28''.65$$

si applicano le correzioni:

per il centramento della direzione . . . . . = — 2′.08″.53
per la convergenza dei meridiani fra stazione e centro = + 0. 73
per la riduzione al centro della mira di M. Circeo . = + 14. 99
— 1. 52. 81

si trova il risultato finale (media di 101 determinazioni).

Azimut della direzione Ponza-M. Circeo.

$$A = 13°.46'.35''.84 \qquad m = 0''.31$$

(Epoca 1905. 55)

$$dA = + 0.02\, d\alpha - 1.13\, d\delta + 0.02\, d\varphi .$$

Stazione a Monte Circeo.

Il punto trigonometrico è costituito dall'asse dell'albero di segnalazione del Semaforo, sorgente sulla punta orientale del monte (455^m). Il pilastro d'osservazione venne costruito sul ripiano che circuisce il Semaforo, e collegato al centro in doppio modo. Le sue coordinate polari rispetto al centro risultarono:

$$e = 10^m.693 \qquad \alpha = 336°.33'.$$

Le operazioni durarono dal 28 luglio al 6 agosto 1905.

Determinazione della latitudine. — Si osservarono i passaggi meridiani di 60 stelle del B. A. J., divise in 6 gruppi di 10 stelle ciascuno, e si ottennero i risultati riassunti nel seguente specchio:

Gruppi	Posizioni del cerchio zenitale					Medie	Numero delle osservazion
	0°	45°	90°	135°	180°		
			41°.13′				
I	44″.28	44″.44	43″.99	43″.67	44″.48 (1)	41°.13′.44″.16	49
II	43. 38	44. 03 (3)	44. 14	43. 69	43. 11	43. 63	45
III	43. 88	44. 20	44. 45	44. 30	44. 23	44. 21	50
IV	44. 12	43. 97 (2)	44. 16	43. 54	43. 72	43. 90	48
V	43. 41	42. 76 (2)	44. 00	43. 77	43. 53	43. 52	48
VI	44. 37	44. 07	44. 16	43. 99	43. 79 (1)	44. 08	49
Medie . .	43. 91	43. 90	44. 15	43. 83	43. 80	41. 13. 43. 92	289

Applicando alla latitudine finale del pilastro d'osservazione

$$\varphi = 41°.13'.43''.92$$

la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = - 0''.32$$

si trova per la latitudine di M. Circeo (centro), come risultato di 289 osservazioni meridiane di 60 stelle fondamentali,

$$\varphi = 41°.13'.43''.60 \qquad m = 0''.07$$

(Epoca 1905. 58)

(1) Peso 9, (2) peso 8, (3) peso 5.

Determinazione dell'azimut della direzione M. Circeo-Ponza. — L'apparato diottrico fungente da mira notturna, venne collocato sulla terrazza del Semaforo di Ponza, fuori centro. La distanza della mira essendo di 39958^{m}, il suo angolo zenitale risultò di 90°.23′.

Le correzioni del cronometro Kullberg si determinarono notando i passaggi delle stesse stelle di latitudine pel filo mobile, disposto in modo da avere una costante di collimazione piccolissima. Si scelsero le stelle culminanti in prossimità dello zenit, per attenuare l'influenza dell'azimut strumentale.

Tali correzioni sono quì riassunte:

28	luglio 1905	a $20^{h}.45^{m}$	$+2^{m}.39^{s}.55$
29	»	20. 46	2. 39. 92
30	»	20. 53	2. 40. 05
31	»	24. 19	2. 39. 67
1	agosto	20. 45	2. 39. 11
2	»	19. 11	2. 38. 76
3	»	23. 07	2. 38. 53
4	»	24. 27	2. 38. 53
5	»	17. 10	2. 38. 70

I valori dell'azimut della mira dedotti dalle diverse serie (costituita ciascuna da quattro determinazioni singole) sono riassunti nel seguente specchio:

Data	l'osiz. d. cerch.	A	c_m	c_*	$c_m - c_*$	Espressioni differenziali
1905						
31 luglio	0°	193°50′.38″66	+5″.8	+8″.7	−2″.9	$dA = -0.23\,d\alpha - 1.09\,d\delta + 0.02\,d\varphi$
» »	»	38. 50	5. 6	9. 2	3. 6	−0.16 −1.21 +0.02
» »	30	37. 60	5. 9	8. 4	2. 5	−0.08 −1.30 +0.02
» »	»	36. 92	5. 6	8. 7	3. 1	+0.01 −1.33 +0.02
» »	60	41. 12	5. 0	7. 1	2. 1	+0.08 −1.31 +0.02
» »	»	39. 97	5. 0	8. 5	3. 5	+0.15 −1.25 +0.02
» »	90	38. 07	5. 4	7. 8	2. 4	+0.23 −1.09 +0.02
» »	»	39. 69	4. 8	9. 1	4. 3	+0.29 −0.98 +0.02
1 agosto	120	41. 63	−8. 6	−5. 2	3. 4	+0.43 −0.09 +0.00
3 »	»	36. 41	+4. 7	+7. 5	2. 8	−0.25 −1.06 +0.02
» »	150	37. 50	6. 4	8. 5	2. 1	+0.02 −1.33 +0.02
» »	»	38. 98	5. 4	7. 6	2. 2	+0.09 −1.31 +0.02
4 »	195	39. 88	4. 9	7. 7	2. 8	−0.24 −1.07 +0.02
» »	»	39. 94	6. 1	8. 1	2. 0	−0.12 −1.27 +0.02
» »	225	39. 84	7. 1	8. 9	1. 8	−0.04 −1.33 +0.02
» »	»	38. 97	7. 3	9. 2	1. 9	+0.02 −1.33 +0.02
» »	255	40. 43	6. 1	7. 2	1. 1	+0.12 −1.28 +0.02
» »	»	40. 23	7. 1	6. 6	+0. 5	+0.23 −1.09 +0.02
» »	285	41. 08	6. 9	7. 7	−0. 8	+0.29 −0.98 +0.02
» »	»	40. 77	6. 6	7. 1	0. 5	+0.35 −0.78 +0.01
5 »	315	37. 61	7. 2	8. 1	0. 9	−0.04 −1.33 +0.02
» »	»	40. 59	6. 1	8. 1	2. 0	+0.06 −1.33 +0.02
» »	»	40. 17	5. 6	7. 5	1. 9	+0.13 −1.27 +0.02

Il cannocchiale fu invertito sui guanciali a metà delle operazioni.
Se alla media dei valori della terza colonna

$$A = 193.50.39.37$$

si applicano le correzioni

per il centramento della direzione	$= + 33''.785$
per la convergenza dei meridiani fra stazione e centro	$= + 0.120$
per la riduzione della mira al centro	$= - 11.582$
	$+ 22.323$

si trova come risultato finale (media di 91 determinazioni).

Azimut della direzione M. Circeo-Ponza.

$$A = 193°.51'.01''.69 \qquad m = 0''.30$$

(Epoca 1905.58)

$$dA = + 0.06\, d\alpha - 1.15\, d\delta + 0.02\, d\varphi .$$

Riduzione delle coordinate astronomiche al Polo medio. — Deviazioni della verticale. — Nel quadro seguente sono riunite in ordine cronologico le riduzioni al Polo medio della latitudine e dell'azimut per tutte le stazioni eseguite lungo il meridiano di Roma. Ritenute le notazioni di Albrecht, esse vennero calcolate colle formole

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda + z$$
$$A - A_0 = (y \cos \lambda - x \operatorname{sen} \lambda) \sec \varphi .$$

Per le determinazioni comprese fra il 1900.0 ed il 1905.0 si adoperarono gli elementi contenuti nelle pubblicazioni del Centralbureau der Int. Erdm. — *Resultate des Internationalen Breitendienstes*, Bd. I, u. II —; per quelli posteriori gli elementi contenuti nelle *Astron. Nachrichten* n. 4121, incluso il termine di Kimura. Per le osservazioni anteriori al 1900.0 si adoperò il *Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899*, pure redatto da Albrecht.

Stazioni	λ	Riduzione della latitudine		Riduzione dell'azimut	
		Epoca	$\varphi-\varphi_0$	Epoca	$A-A_0$
Monte Cavo.	— 12°.43′	1898. 48	— 0″.12	—	—
Fiumicino.	— 12. 14	1898. 56	— 0. 06	1898. 57	+ 0″.22
Monte Pisarello . .	— 12. 37	1899. 48	— 0. 10	1899. 49	+ 0. 02
Monte Soratte . . .	— 12. 30	1900. 53	— 0. 05	1900. 52	— 0. 09
S. Pietro in Vincoli	— 12. 30	1900. 85	— 0. 02	1900. 82	+ 0. 05
Monte Cimino	— 12. 12	1901. 54	+ 0. 09	1901. 53	— 0. 11
Monte Peglia. . . .	— 12. 13	1901. 58	+ 0. 08	1901. 57	— 0. 13
Alta S. Egidio. . .	— 12. 00	1902. 56	+ 0. 14	1902. 58	+ 0. 10
Monte Carpegna . .	— 12. 19	1902. 63	+ 0. 15	1902. 61	+ 0. 07
Bertinoro	— 12. 08	1902. 66	+ 0. 15	1902. 67	— 0. 01
Venezia	— 12. 22	1903. 66	+ 0. 17	—	—
Donada	— 12. 13	1903. 68	+ 0. 19	—	—
Comacchio	— 12. 11	1903. 70	+ 0. 21	—	—
Oderzo.	— 12. 30	1904. 52	— 0. 04	1904. 54	+ 0. 29
Col Brombolo. . . .	— 12. 25	1904. 57	+ 0. 01	—	—
Calalzo	— 12. 23	1904. 60	+ 0. 05	—	—
Monte Mario	— 12. 27	1904. 87	+ 0. 20	1904. 82	+ 0. 10
Ponza	— 12. 57	1905. 54	— 0. 13	1905. 55	+ 0. 19
Monte Circeo. . . .	— 13. 03	1905. 58	— 0. 09	1905. 58	+ 0. 22

Applicando queste riduzioni col segno cambiato ai risultati della osservazione, ed ordinando le stazioni per latitudini crescenti, si trovano i valori del quadro seguente, nel quale per la stazione di M. Mario vennero introdotti i risultati delle mie osservazioni del 1904 (1), valori che verranno modificati quando la Commissione Geodetica avrà debitamente combinate le diverse determinazioni, ivi effettuate per suo conto da diversi operatori.

(1) *Processo verbale delle sedute della R. Commissione Geodetica Italiana, tenute in Roma nei giorni 3, 4 e 6 aprile 1906*, Bologna 1906, pag. 39 e 44.

Stazioni	Altezza sul mare	Latitudine		Azimut		$\varphi_a - \varphi_g$	$A_a - A_g$	Denominazione dell'azimut
		astronomica	geodetica	astronomico	geodetico			
	m	° ′ ″	″	° ′ ″	″	″	″	
Ponza	280	40. 52. 56. 19	59. 65	13. 46. 35. 65	42. 97	— 3. 46	— 7. 32	M. Circeo
M. Circeo	455	41. 13. 43. 69	44. 91	193. 51. 07. 47	8. 68	— 1. 22	— 7. 21	Ponza
M. Pisarello	52	41. 28. 36. 13	36. 24	15. 28. 57. 05	62. 81	— 0. 11	— 5. 76	M. Cavo
M. Cavo	967	41. 45. 03. 54	2. 13	—	—	+ 1. 41	—	—
Fiumicino	20	41. 46. 14. 65	12. 89	47. 29. 36. 45	42. 43	+ 1. 76	— 5. 98	M. Mario
S. Pietro in Vincoli	69	41. 53. 35. 39	33. 41	315. 20. 19. 37	24. 99	+ 1. 98	— 5. 62	M. Mario
M. Mario	147	41. 55. 25. 55	24. 40	131. 50. 32. 86	36. 96	+ 1. 15	— 4. 10	M. Cavo
M. Soratte	695	42. 14. 46. 43	40. 79	186. 36. 58. 65	65. 37	+ 5. 64	— 6. 72	M. Mario
M. Cimino	1059	42. 24. 31. 00	24. 79	125. 53. 57. 60	63. 62	+ 6. 21	— 6. 02	M. Soratte
M. Peglia	836	42. 49. 09. 28	2. 78	150. 51. 52. 49	58. 27	+ 6. 50	— 5. 78	M. Cimino
Alta S. Egidio	1057	43. 18. 47. 16	37. 83	162. 53. 32. 96	38. 83	+ 9. 33	— 5. 87	M. Peglia
M. Carpegna	1415	43. 48. 23. 06	4. 79	339. 01. 11. 81	10. 39	+ 18. 27	+ 1. 42	Bertinoro
Bertinoro	340	44. 08. 45. 62	28. 79	158. 53. 37. 08	37. 67	+ 16. 83	— 0. 59	M. Carpegna
Comacchio	5	44. 41. 32. 64	42. 09	—	—	— 9. 45	—	—
Donada	8	45. 02. 05. 85	13. 09	—	—	— 7. 24	—	—
Venezia	4	45. 25. 58. 40	60. 83	—	—	— 2. 43	—	—
Oderzo	16	45. 46. 48. 59	54. 40	0. 26. 28. 95	25. 94	— 5. 81	+ 3. 01	M. Cavallo
Col Brombolo	1333	46. 01. 36. 20	62. 17	—	—	— 25. 97	—	—
Calalzo	807	46. 26. 46. 17	55. 83	—	—	— 9. 66	—	—

Le coordinate geografiche, cortesemente comunicatemi dall' Istituto Geografico Militare, provengono da Genova, e furono calcolate sull'ellissoide di Bessel ivi orientato.

Da questo specchio, oltre alla forte deviazione in latitudine fra Bertinoro e Comacchio già accertata in un precedente lavoro (1) (26″, essendo $d\varphi$ 33′.13″ pari a 61 ½ km., la distanza dei due paralleli), emerge ancora una deviazione relativamente più forte, cioè di 20″ fra Oderzo e Col Brombolo, i cui paralleli sono ad una distanza di appena 14′.48″ pari a 27 ½ km. Il filo a piombo nella stazione di Col Brombolo, situata sull'estremo ciglio meridionale delle Alpi Bellunesi, e dominante tutta la pianura veneta, appare fortemente deviato nel senso voluto dalle grandi masse emergenti retrostanti. Questa deviazione appare grandemente attenuata a Calalzo di Cadore, nel mezzo delle Alpi dolomitiche. — Nella parte meridionale dell'arco di meridiano esplorato, l'andamento della verticale appare più regolare.

Cogli elementi sopra riportati si potrebbe costruire il profilo della linea meridiana, ma essendo negli intendimenti della Commissione Geodetica e dell' Istituto Geografico Militare di assumere il segnale geodetico di M. Mario come origine delle coordinate geodetiche dei vertici della rete trigonometrica italiana, si rimanda la determinazione a quando si avranno i valori definitivi di tali coordinate.

(1) *Determinazioni astronomiche di latitudine eseguite a Venezia, Donada e Comacchio nel 1903.* Rendic. Acc. dei Lincei, Maggio 1904.

Fisica — *Comportamento dei vapori metallici nella scintilla elettrica.* Nota di A. Battelli e di L. Magri.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota X del Socio G. Ciamician e di P. Silbir.

Chimica. — *I quattro binitroderivati della ortobibromobenzina.* Nota del Socio G. Körner e del dott. Contardi.

Geologia. — *Cenni geologici sul Diebel Aziz in Tunisia.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Geologia. — *L'isola di Capri.* Nota del Corrispondente Giuseppe De Lorenzo.

Meccanica. — *Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra la configurazione di Kummer e il suo intervento nella teoria delle cubiche gobbe.* Nota di Luigi Berzolari, presentata dal Socio C. Segre.

Malgrado i molteplici punti di vista dai quali è stata studiata la configurazione di Kummer, ritengo non privo d'interesse farne conoscere la seguente semplicissima costruzione geometrica, dalla quale si deduce pressochè immediatamente un notevole teorema, che stabilisce uno stretto legame, a quanto sembra non ancora osservato, tra quella configurazione e la teoria delle cubiche gobbe (1).

1. Siano $u_1, v_1 ; u_2, v_2 ; u_3, v_3$ tre coppie di generatrici, a due a due armoniche, di una rigata quadrica R, appartenente ad una superficie S di 2° ordine. Prese come assi, esse individuano tre involuzioni rigate I_1, I_2, I_3, di cui ciascuna è il prodotto delle altre due (eseguito in un ordine qualunque); di guisa che si ottiene un'involuzione Ω di 4° ordine, i cui ∞^3 gruppi son formati dai singoli punti dello spazio coi loro coniugati in I_1, I_2, I_3. *I punti di un gruppo sono vertici d'un tetraedro autoreciproco rispetto ad* S, a meno che non giacciano tutti sopra una generatrice della rigata trasversale di R.

Dicansi A_1, A_2, A_3, A_4 i punti d'un gruppo generico di Ω, in modo che A_1, A_2, A_3 siano i coniugati di A_4 in I_1, I_2, I_3, epperò A_2 e A_3 coniugati tra loro in I_1, A_3 e A_1 in I_2, A_1 e A_2 in I_3. Se a formare similmente un secondo gruppo $B_1 B_2 B_3 B_4$ si parte da un punto B_4 del piano $A_1 A_2 A_3$, *i due tetraedri* $A_1 \ldots A_4$ *e* $B_1 \ldots B_4$ *risultano di Möbius.* Invero le rimanenti facce $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_1 A_4$, $A_1 A_2 A_4$ del primo, essendo coniugate alla $A_1 A_2 A_3$ risp. in I_1, I_2, I_3, contengono ordinatamente i vertici B_1, B_2, B_3 del secondo; che poi questo sia alla sua volta circoscritto al primo nel modo anzidetto, si riconosce trasformando l'uno e l'altro con la polarità rispetto ad S.

Costruendo allora di Ω un terzo gruppo $C_1 C_2 C_3 C_4$, dove C_4 è un punto generico della retta comune ai piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, e poi un quarto gruppo $D_1 D_2 D_3 D_4$, in cui D_4 è l'intersezione dei piani $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, *i vertici e le facce dei quattro tetraedri risultanti* (A), (B), (C), (D) *sono gli elementi d'una configurazione di Kummer.* Basta infatti (2) osservare

(1) In un prossimo lavoro mostrerò come lo stesso teorema sussista, più generalmente, per le curve gobbe razionali *d'ordine dispari*, dotate di quattro punti d'iperosculazione.

(2) Cfr. Ciani, *Sopra la configurazione di Kummer*, Giorn. di mat., *34* (1896), pag. 177; *37* (1899), pag. 62; Martinetti, *Sopra la configurazione di Kummer*, ibid., *35* (1896), pag. 235.

che per ognuno dei 16 punti passano 6 dei 16 piani, che in ciascuno di questi piani stanno 6 di quei punti, e che nessuna retta appartiene a più che due di tali punti o di tali piani (1).

S' indicano subito i sei complessi lineari, a due a due in involuzione, dai quali, nella nota maniera dovuta al sig. Klein, proviene la nostra configurazione. Tre, che si tagliano nella rigata trasversale di R, dipendono unicamente dalle coppie di rette u_i, v_i, e non dai punti A_i, B_i, C_i, D_i, e sono i complessi G_1, G_2, G_3 relativi ai sistemi nulli N_1, N_2, N_3 individuati dalla schiera R riferita involutoriamente a sè stessa risp. con le rette doppie u_1 e v_1, u_2 e v_2, u_3 e v_3, cioè quelli costituiti dalle rette che si appoggiano alle coppie di generatrici di R coniugate in tali involuzioni. Gli altri tre, G'_1, G'_2, G'_3, aventi in comune la rigata R, sono quelli rispetto a cui, per una nota proprietà, son tra loro reciproci risp. i tetraedri (B) e (C), (C) e (A), (A) e (B), e di conseguenza anche risp. (A) e (D), (B) e (D), (C) e (D). Ognuno di questi tetraedri, ossia insomma il tetraedro che ha i vertici nei punti d'un gruppo qualunque di Ω, è invece mutato in sè da N_1, N_2, N_3; di più si ha:

$$N_i N_j \equiv N_j N_i \equiv I_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Del resto, anche G_1, G_2, G_3 possono ottenersi da coppie di tetraedri di Möbius formati con elementi della configurazione: G_1 da ciascuna delle coppie

$$A_1A_4B_2B_3 \quad A_1A_4C_2C_3 \quad A_1A_4D_2D_3 \quad B_2B_3C_1C_4 \quad B_2B_3D_1D_4 \quad C_2C_3D_1D_4$$
$$B_1B_4A_2A_3\ ,\ C_1C_4A_2A_3\ ,\ D_1D_4A_2A_3\ ,\ C_2C_3B_1B_4\ ,\ D_2D_3B_1B_4\ ,\ D_2D_3C_1C_4\ ,$$

G_2 e G_3 dalle coppie che si deducono da queste con le permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3.

2. Data, inversamente, una configurazione di Kummer, i suoi elementi si possono distribuire (Schröter, loc. cit.; Sturm, loc. cit.), in 20 modi diversi, nei vertici e nelle facce di una quaterna di tetraedri $(A) \equiv A_1 \ldots A_4$, $(B) \equiv B_1 \ldots B_4$, $(C) \equiv C_1 \ldots C_4$, $(D) \equiv D_1 \ldots D_4$, autoreciproci rispetto ad una quadrica S, e di cui due qualunque sono di Möbius nell'ordine scritto. Restano così determinati tre complessi lineari G'_1, G'_2, G'_3, a due a due in involuzione, aventi a comune le generatrici d'una schiera R di S, e tali che rispetto ad essi sono ordinatamente tra loro reciproci (B) e (C), (A) e (D);

(1) I tetraedri qui costruiti son di quelli che diconsi « di Rosenhain »; nel lavoro di H. Weber, *Ueber die Kummersche Fläche* ecc., Journ. für Math., *84* (1877), pag. 332, sono studiati col nome di tetraedri « erster Art ». Quaterne di tali tetraedri che, come quella del testo, comprendano coi loro vertici e con le loro facce tutti gli elementi della configurazione, furono considerate per la prima volta dallo Schröter, *Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummersche Configuration*, Journ. für Math., *100* (1886), pag. 231. Cfr. pure R. Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie*, Bd. 2, Leipzig 1893, pag. 130 e seg.

(C) e (A), (B) e (D); (A) e (B), (C) e (D). Dicendo N_1', N_2', N_3' le relative polarità nulle (a due a due permutabili), il prodotto di due qualunque è altresì il prodotto della rimanente per la polarità rispetto ad S, ed è un' involuzione rigata, nella quale son tra loro coniugati i vertici di due dei quattro dati tetraedri ed anche i vertici degli altri due; così nell' involuzione $N_2' N_3' \equiv N_3' N_2'$ son coniugati ai punti $B_1, \ldots, B_4$ i punti $C_1, \ldots, C_4$, ed ai punti $A_1, \ldots, A_4$ i punti $D_1, \ldots, D_4$. Gli assi delle tre involuzioni sono tre coppie, a due a due armoniche, di generatrici dell'altra schiera di S [1].

Siano $u_1, v_1 ; u_2, v_2 ; u_3, v_3$ le generatrici di R passanti per i punti d' incontro di S con le rette A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4, e dicansi I_1, I_2, I_3 le involuzioni rigate aventi per assi queste tre coppie di rette. Anche la A_2A_3, essendo reciproca di A_1A_4 rispetto ad S, taglia u_1 e v_1, epperò A_2 e A_3, al pari di A_1 e A_4, sono coniugati in I_1; similmente A_3 e A_1, come A_2 e A_4, son coniugati in I_2, e A_1, A_2, come A_3, A_4, in I_3. Se poi si chiamano P e Q le intersezioni di u_1 con A_2A_3 e di v_1 con A_1A_4, la retta PQ appartiene ad S, quindi taglia u_2 e v_2. Perciò il coniugato di P in I_2, dovendo giacere sulla PQ e sulla coniugata di A_2A_3, che è A_1A_4, sarà Q. Si conclude che nella schiera R le coppie di generatrici $u_1, v_1 ; u_2, v_2 ; u_3, v_3$ si separano a due a due armonicamente, epperò individuano, nel modo che si è detto al n° 1, un' involuzione biquadratica Ω, di cui un gruppo è $A_1A_2A_3A_4$. Altri tre gruppi son formati dai vertici di (B), (C), (D), giacchè, appoggiandosi gli spigoli di (A) ordinatamente alle $u_1, v_1 ; u_2, v_2 ; u_3, v_3$, lo stesso avviene degli spigoli degli altri tre tedraedri corrispondenti a quelli nelle involuzioni rigate $N_2'N_3', N_3'N_1', N_1'N_2'$. *Una data configurazione di Kummer può dunque generarsi, in 20 modi diversi, con la costruzione del n. 1.*

3. Sia Γ^3 una cubica gobba, e scelti su essa quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, siano $U_1, V_1 ; U_2, V_2 ; U_3, V_3$ le coppie (a due a due armoniche, su Γ^3) dei punti doppî delle tre involuzioni individuate sulla curva risp. dalle coppie A_2, A_3 ed A_1, A_4; A_3, A_1 ed A_2, A_4; A_1, A_2 ed A_3, A_4 di punti coniugati. Le rette U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 sono le generatrici che a due a due hanno in comune le tre schiere rigate composte di corde di Γ^3 e risp. determinate dalle corde congiungenti le dette coppie di punti coniugati. Chiamando R la schiera che ha per direttrici le rette stesse, le sue coppie di generatrici $u_1, v_1 ; u_2, v_2 ; u_3, v_3$ uscenti dalle coppie di punti $U_1, V_1 ; U_2, V_2 ; U_3, V_3$ sono a due a due armoniche, e, prese come assi, individuano tre involuzioni rigate I_1, I_2, I_3, due qualunque delle quali hanno per prodotto la terza, mentre ciascuna trasforma la cubica in sè. Ne risulta, come al n° 1, un' involuzione Ω del 4° ordine: la quale, nel caso presente, è così fatta che se un suo gruppo ha su Γ^3 uno de' suoi punti, vi ha pure i tre punti rimanenti. La cubica contiene pertanto

[1] Per le proprietà qui usate di due tetraedri di Möbius cfr. Caporali e Del Pezzo, *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* (1885), nelle *Memorie di geometria* del Caporali, Napoli 1888, pag. 270 (§ X). Cfr. pure Sturm, loc. cit., Bd. 1, pag. 70.

∞^1 gruppi di Ω, i quali costituiscono l'involuzione (sizigetica) Ω' determinata sulla curva stessa dal gruppo $A_1 A_2 A_3 A_4$ e dal suo Hessiano (1).

Un gruppo di Ω è $A_1 A_2 A_3 A_4$. Altri tre si hanno, evidentemente, nei vertici $B_1, \ldots, B_4$; $C_1, \ldots, C_4$; $D_1, \ldots, D_4$ dei seguenti altri tetraedri: quello, (B), che ha per facce i piani osculatori in $A_1, \ldots, A_4$; quello, (C), che ha per vertici le intersezioni delle tangenti nei vertici del primo, (A), con le facce risp. opposte; quello, (D), che ha per facce i piani che dai vertici di (B) proiettano le tangenti situate nelle facce risp. opposte. Ora, per notissime proprietà, questi quattro tetraedri sono a due a due di Möbius; segue quindi dal n° 1 che *i loro vertici e le loro facce formano una configurazione di Kummer.*

Una tal configurazione — pur non essendo, generalmente, nè tetraedroidale nè degenere — non è però la più generale possibile: essa possiede infatti un sol modulo, quello della quaterna di punti $A_1 A_2 A_3 A_4$ considerati sulla cubica gobba, mentre tre sono i moduli della configurazione generale di Kummer. L'osservazione del resto risulterà confermata per altra via fra poco (n° 5).

4. Mantenendo per i sei complessi lineari a due a due involutorî, da cui la nostra configurazione può pensarsi originata, le notazioni del n° 1, è chiaro che G_k contiene le tangenti di Γ^3 nei punti doppî delle involuzioni subordinate sulla cubica da I_i e I_j $(i, j, k = 1, 2, 3)$, cioè nei punti U_i, V_i, U_j, V_j.

Il complesso G_3', che scambia tra loro (A) e (B), ed anche (C) e (D), non è altro che quello relativo al sistema nullo determinato da Γ^3.

Quanto a G_1', poichè scambia tra loro (B) e (C) e pure tra loro (A) e (D), contiene le rette $A_1 C_1, \ldots, A_4 C_4$, tangenti a Γ^3 nei punti $A_1, \ldots, A_4$; e poichè d'altra parte è in involuzione con G_3', esso coincide col complesso che fu per la prima volta considerato dal sig. Sturm (2) come luogo delle coppie di quadrisecanti delle tangenti condotte a Γ^3 nelle quaterne di punti apolari ad $A_1 A_2 A_3 A_4$. La detta proprietà, che rispetto a G_1' sono reciproci (A) e (D), come pure (B) e (C), equivale perfettamente alle costruzioni date dal sig. Sturm (Mem. citata, n° 26) per i piani focali di $A_1, \ldots, A_4$ e per i fuochi dei piani osculatori a Γ^3 in questi punti rispetto a G_1'.

Infine G_2', essendo in involuzione con G_1' e con G_3', proviene con la generazione dello Sturm da una quaterna di punti di Γ^3 apolare ad $A_1, \ldots, A_4$;

(1) In relazione con quest'argomento vedasi, anche per le relative notizie bibliografiche, il mio lavoro *Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba,* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, vol. 5 (1891), pp. 9 e 33, dove sono date notevoli proprietà dell'iperboloide su cui è tracciata la schiera R.

(2) *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve,* Journ. für Math., *86* (1878), pag. 116 (n. 23 e seg.); cfr. pure *Linien geometrie,* Bd. 1, pag. 326.

esso contiene perciò le tangenti di Γ^3 nei quattro punti che formano il gruppo dell'involuzione sizigetica Ω' apolare al gruppo $A_1 \dots A_4$ [1].

5. Che i sei punti della configurazione situati in un piano (della medesima), per es. i punti $A_4, C_4, D_4, B_1, B_2, B_3$, appartengano ad una conica (e dualmente per i sei piani concorrenti in un suo punto), si deduce (con noto ed ovvio ragionamento, valido per ogni configurazione di Kummer) da ciò, che i triangoli $A_4 C_4 D_4$ e $B_1 B_2 B_3$ sono autoreciproci rispetto alla conica secondo cui il loro piano taglia la quadrica contenente la schiera R. Ma nel caso attuale le stesse 16 coniche possono anche definirsi in altro modo, che merita d'essere rilevato. Riferiamoci, per es., ancora al piano precedente, osculatore a Γ^3 in A_4. Le rette $B_2 B_3, B_3 B_1, B_1 B_2$ sono le sue intersezioni coi piani osculatori risp. in A_1, A_2, A_3, mentre la retta $A_4 C_4$ tocca Γ^3 in A_4. Quest'ultima incontra dunque le prime in tre punti A_1', A_2', A_3' che sono le intersezioni della stessa con quei tre piani osculatori; epperò la punteggiata $A_1' A_2' A_3' A_4$, posta sulla tangente $A_4 C_4$, è proiettiva alla punteggiata $A_1 A_2 A_3 A_4$ di Γ^3. Ma la prima è proiettiva al fascio di rette $A_4(B_1 B_2 B_3 C_4)$, onde si conclude che *la conica considerata è, sul piano osculatore in* A_4, *il luogo d'un punto dal quale i punti* B_1, B_2, B_3, C_4 *sono proiettati secondo un gruppo proiettivo al gruppo* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *della cubica gobba.*

Trasformando successivamente il precedente fascio di rette con le polarità rispetto ai complessi G_1', G_2', G_4', risulta che son pure proiettivi ad $A_1 A_2 A_3 A_4$ (su Γ^3) i fasci $C_4(D_1 D_2 D_3 A_4)$, $B_4(A_1 A_2 A_3 D_4)$, $D_4(C_1 C_2 C_3 B_4)$, il che definisce le coniche della configurazione situate nelle facce dei tetraedri (D), (A), (C) [2].

6. Le proprietà degli ultimi tre n^i soffrono eccezione quando i punti A_1, A_2, A_3, A_4 formino su Γ^3 un gruppo equianarmonico. È noto infatti [3]

[1] Se in una qualsiasi determinazione parametrica scelta su Γ^3 è f la forma binaria biquadratica che ha per radici i parametri dei punti $A_1, \dots, A_4$, e si denotano, come di solito, con H il suo Hessiano e con i e j i suoi invarianti quadratico e cubico, il detto gruppo di Ω' ha per parametri le radici del covariante $jf - i\mathrm{H}$. Cfr. il mio citato lavoro *Intorno alla rappresentazione* ecc.

[2] Ricorrendo alla rappresentazione parametrica delle coordinate dei punti di Γ^3, si trova senza difficoltà:

$$(B_1 B_2 B_3 A_4) = \Delta \frac{\Delta - 2}{1 - 2\Delta}, \qquad (B_1 B_2 B_3 D_4) = \Delta^3 \frac{\Delta - 2}{1 - 2\Delta},$$

dove i birapporti si riferiscono ai punti considerati sulla conica a cui tutti appartengono, e Δ denota il birapporto dei punti $A_1, \dots, A_4$ pensati come esistenti su Γ^3. Quando siasi descritta la conica (nel modo indicato, ossia partendo dai punti B_1, B_2, B_3, C_4), queste formole fissano sulla medesima le posizioni degli altri due punti A_4, D_4. Lo stesso dicasi delle altre 15 coniche.

[3] V., anche per proprietà più generali, la mia Nota *Sulle curve d'ordine n dello spazio ad n dimensioni*, Rend. del R. Istituto Lombardo, (2) *36* (1903), pag. 791; oppure

che i punti $C_1, \ldots, C_4$ giacciono allora sopra una retta, appartenente al complesso lineare G_3' individuato da Γ^3, e per la quale passano quindi pure i piani che da $B_1, \ldots, B_4$ proiettano le tangenti nei punti $A_1, \ldots, A_4$ (quelli cioè che nel caso generale sono le facce del tetraedro (D)). D'altra parte, i complessi G_1', G_2' vengono a coincidere col complesso speciale che ha per asse la retta precedente.

Esaminiamo invece ciò che avviene quando $A_1, \ldots, A_4$ siano armonici su Γ^3. Posto, per es., che A_1 e A_4 separino armonicamente A_2 e A_3, le rette $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $B_1 B_4$, $B_2 B_3$, che in ogni caso son comuni ai complessi G_2 e G_3, appartengono altresì a G_1': infatti delle tangenti di Γ^3 appoggiate, per es., ad $A_1 A_4$, due hanno il punto di contatto in A_1 e due in A_4, e il gruppo formato dai punti A_1 e A_4 contati due volte è apolare ad $A_1 \ldots A_4$. Ne segue che su quelle quattro rette stanno risp. anche le coppie di punti $D_2 D_3$, $D_1 D_4$, $C_2 C_3$, $C_1 C_4$, separate dalle precedenti armonicamente. Di più, tanto le rette $A_1 A_4$ e $A_2 A_3$, quanto le $B_1 B_4$ e $B_2 B_3$ sono coniugate rispetto a G_1; perciò le $A_1 D_1, \ldots, A_4 D_4$, che sempre son comuni ai complessi G_2' e G_3', nel caso attuale stanno pure in G_1, e contengono quindi ancora risp. le coppie di punti $B_4 C_4$, $B_3 C_3$, $B_2 C_2$, $B_1 C_1$ [1]. In conclusione, i 16 punti della configurazione sono, nel caso presente, le intersezioni di 4 generatrici della rigata comune ai complessi G_2, G_3, G_1' con 4 generatrici della rigata trasversale (comune a G_2', G_3', G_1); e i 16 piani della medesima son quelli determinati dalle prime con le seconde generatrici. La quadrica su cui son tracciate le due schiere — e che, contata due volte, costituisce la superficie di Kummer determinata dalla configurazione — contenendo, come generatrici della seconda schiera, le rette u_1, v_1, incontra Γ^3, fuori dei punti $A_1, \ldots, A_4$, nei punti U_1, V_1 che separano armonicamente le coppie $A_1 A_4$ e $A_2 A_3$.

---

l'altra *Alcuni teoremi sulle curve razionali di uno spazio ad r dimensioni dotate di r + 1 punti d'iperosculazione*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo, *22* (1906), pag. 214 (n. 4).

[1] Si potrebbe dimostrare che i birapporti $(B_4 C_4 A_1 D_1), \ldots, (B_1 C_1 A_4 D_4)$ hanno il valore $\frac{1}{4}$.

Matematica. — *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* Nota 2ª di Michele Cipolla, presentata dal Corrispondente A. Venturi.

In una precedente Nota di egual titolo, noi ci occupammo della risoluzione apiristica di una congruenza binomia, di cui il grado e il modulo sono potenze di uno stesso numero primo.

Qui vogliamo considerare il caso generale di una congruenza binomia di grado n, secondo il modulo p^m, essendo p un numero primo dispari ed n un divisore qualunque di $p^{m-1}(p-1)$.

Questo caso richiede la considerazione dei cosiddetti *sistemi completi* n^{imo} *grado* (*mod.* p^m); il quale concetto, estensione di quello introdotto per la prima volta da noi nella risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo, ci condurrà alla ripartizione dei numeri di un sistema completo di resti (mod. p^m) in altri sistemi, in ciascuno dei quali esiste uno ed un sol numero che sia soluzione di una data congruenza binomia (mod. p^m). Dopo ciò non sarà difficile giungere alle cercate formole di risoluzione.

§ 1. — *Sistemi completi di* n^{imo} *grado* (*mod.* p^m).

1. Se i numeri

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \tag{1}$$

sono primi con p e le loro potenze n^{ime} sono incongrue fra loro (mod. p^m) e inoltre formano un gruppo secondo il modulo p^m stesso, noi diremo che essi costituiscono *un sistema completo di* n^{imo} *grado (mod.* p^m*), d'ordine* k.

L'ordine k è un divisore di $\frac{p^{m-1}(p-1)}{n}$, poichè il gruppo corrispondente delle potenze n^{ime} è un divisore del gruppo d'ordine $\frac{p^{m-1}(p-1)}{n}$, formato da tutti i residui n-ici di p^m, incongrui fra loro (mod. p^m).

Le potenze n^{ime} *dei numeri* (1) *sono tutte le soluzioni della congruenza*

$$x^k \equiv 1 \pmod{p^m}. \tag{2}$$

Infatti, se μ è il periodo di r_i^n, p. es., sarà μ un divisore di k, onde r_i^n è una soluzione della congruenza $x^\mu \equiv 1$ (mod. p^m), e però della (2). Tutte le potenze n^{ime} dei numeri (1), soddisfacendo alla congruenza (2) ed essendo incongrue fra loro (mod. p^m) e in numero di k, son tutte le soluzioni della (2).

Se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono tutte le soluzioni della congruenza $x^n \equiv 1 \pmod{\gamma^m}$, i numeri $r_i \gamma_n$ $(i = 1, 2, \dots, k\ ;\ h = 1, 2, \dots n)$ si possono ripartire nei sistemi

$$(3) \qquad \begin{cases} r_1\gamma_1, r_1\gamma_2, \dots, r_1\gamma_n \\ r_2\gamma_1, r_2\gamma_2, \dots, r_2\gamma_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_k\gamma_1, r_k\gamma_2, \dots, r_k\gamma_n. \end{cases}$$

È chiaro che un sistema completo di n^{imo} grado (mod. p^m) contiene uno ed un sol numero di ciascun sistema del quadro (3), onde *coi* $\varphi(p^m)$ *numeri di un sistema completo di resti primi con* p, *secondo il mod.* p^m, *si possono formare* n^k *sistemi completi di* n^{imo} *grado* (*mod.* p^m), *d'ordine* k.

2. Sia

$$(4) \qquad R_1, R_2, \dots, R_k$$

un gruppo di residui n-ici (un sistema completo di n^{imo} grado) secondo il mod. p^m, d'ordine k; si può facilmente dimostrare che *se* k *è divisibile per* p^r $(r \leq m-1)$ *ed* s *è un numero intero non superiore ad* r *i numeri* (4) *si possono ripartire in* p^s *gruppi di residui* n-ici (*sistemi completi di* n^{imo} *grado*) *secondo il mod.* p^{m-s}, *tutti dell'ordine* $\frac{k}{p^s}$; *e se invece* k *non è divisibile per* p, *ma è un divisore di* $\frac{1}{n}p^{m-r-1}(p-1)$ *il gruppo* (*il sistema*) (3) *è anche un gruppo di residui* n-ici (*un sistema di* n^{imo} *grado*) *secondo il mod.* p^{m-r}.

Tralasceremo per brevità le dimostrazioni di questi teoremi, che si fondano del resto sui più elementari concetti della teoria generale dei gruppi e della teoria delle congruenze.

3. *Se* k *non è divisibile per* p *e i numeri*

$$(4) \qquad S_1, S_2, \dots, S_k$$

formano un gruppo di residui n-*ici, secondo il mod.* p^{m-r}, *i numeri*

$$(5) \qquad S_1^{p^r}, S_2^{p^r}, \dots, S_k^{p^r}$$

formeranno un gruppo di residui n-ici *secondo il mod.* p^m.

Infatti i numeri (4) sono tutte le soluzioni della congruenza $x^k \equiv 1 \pmod{p^{m-r}}$, e però tutti i numeri (5), che sono incongrui fra loro (mod. p^m), sono le soluzioni della congruenze $x^k \equiv 1 \pmod{p^m}$, e quindi formano un gruppo di residui n-ici secondo il mod. p^m.

4. Un gruppo di residui n-ici (mod. p^m) lo diremo *proprio*, quando due numeri qualunque di esso non sono mai congrui fra loro secondo il mod. p^m. Così pure si dirà che i numeri di un sistema completo di n^{imo} grado

(mod. p^m) formano un sistema *proprio* quando le loro potenze n^{ime} formano un gruppo proprio.

Dai teoremi dei nn. 2 e 3 risulta subito che *condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema completo di n^{imo} grado (un gruppo di residui n-ici) sia proprio è che il suo ordine k non sia divisibile per p.* Inoltre *se*

$$\varrho_1 , \varrho_2 , \dots , \varrho_k \tag{6}$$

è un sistema completo e proprio di n^{imo} grado (mod. p^m), si può porre

$$\varrho_i \equiv r_i^{p^{m-1}} \pmod{p^m}, \qquad (i = 1 , 2 , \dots k), \tag{7}$$

essendo

$$r_1 , r_2 , \dots , r_k$$

un sistema completo di n^{imo} grado secondo il mod. p.

5. Ciò posto, sia ν un divisore di $p-1$, e $k = \dfrac{p-1}{\nu}$, siano inoltre

$$t_1 , t_2 , \dots , t_{p^{m-1}}$$

tutte le soluzioni della congruenza

$$x^{p^{m-1}} \equiv 1 \pmod{p^m} \tag{8}$$

e formiamo il quadro

$$\left\{\begin{array}{llll} t_1\varrho_1 & , t_1\varrho_2 & , \dots , & t_1\varrho_k \\ t_2\varrho_1 & , t_2\varrho_2 & , \dots , & t_2\varrho_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ t_{p^{m-1}}\varrho_1 & , t_{p^{m-1}}\varrho_2 & , \dots , & t_{p^{m-1}}\varrho_k . \end{array}\right. \tag{9}$$

È facile vedere che in questo quadro sono distribuiti in p^{m-1} sistemi i numeri di un sistema completo di ν^{imo} grado (mod. p^m), le cui potenze ν^{ime} sono *tutti* i residui ν-*ici* di p^m, primi con p. È importante poi osservare che se *a è un residuo ν-ico di p^m*, vi è nel quadro (9) un sistema solo che ammetta una soluzione (e una soltanto) della congruenza

$$x^\nu \equiv a \pmod{p^m} . \tag{10}$$

Infatti si scorge subito che il numero

$$t_0 \equiv a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}} \pmod{p^m},$$

è una soluzione della (8); sia ora r_0 quel numero del sistema (9), che verifica la congruenza $x^\nu \equiv a \pmod{p}$, si avrà

$$r_0^{p^{m-1}\nu} \equiv a^{p^{m-1}} \pmod{p^m}$$

cioè, posto $\varrho_0 \equiv r_0^{p^{m-1}} \pmod{p^m}$,

$$\varrho_0^\nu \equiv a^{p^{m-1}} \pmod{p^m} \tag{11}$$

e quindi

$$(t_0 \varrho_0)^\nu \equiv a^{p^m - 2p^{m-1}+1} \equiv a \pmod{p^m}.$$

Premesso ciò, si è condotti facilmente alla determinazione di una soluzione apiristica di una congruenza (10), come vedremo nei successivi §§.

§ 2. — *Risoluzione di una congruenza binomia (mod. p^m), il cui grado è un divisore di $p-1$.*

6. In vista di ulteriori applicazioni noi dimostreremo il seguente teorema più generale:

Se i numeri

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{\frac{p-1}{\nu}} \tag{12}$$

formano un sistema completo e proprio di ν^{imo} grado secondo il mod p^m, posto

$$A_k \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{\nu}} \varrho_i^{\nu k - \alpha}, \tag{13}$$

dove α è un numero intero, l'espressione

$$\frac{\nu}{p-1} a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{\nu}-1} A_k a^{kp^{m-1}} \tag{14}$$

è congrua (mod. p^m) alla potenza α^{ima} di una soluzione apiristica della (10).

Infatti, indicando con x_α l'espressione (14) e con ϱ_0 quel numero del sistema (6), che soddisfa alla congruenza $x^\nu \equiv a^{m-1} \pmod{p^m}$ [cfr. n. 5, formola (11)], la (14) si può mettere sotto la forma

$$x_\alpha \equiv \frac{\nu}{p-1} a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}\alpha} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{\nu}} \frac{(\varrho_0 \varrho_i)^{p-1} - 1}{(\varrho_0 \varrho_i)^\nu - 1} \cdot \varrho_i^{-\alpha}. \tag{15}$$

Ora si osservi che, quando i assume i valori $1, 2, \dots, \frac{p-1}{\nu}$, $(\varrho_0 \varrho_i)^\nu$ percorre un gruppo proprio di residui ν-ici (mod. p^m), onde la differenza $(\varrho_0 \varrho_i)^\nu - 1$ per un solo valore i_0 di i sarà divisibile per p^m.

Poichè, in virtù delle (7), si ha

$$(\varrho_0 \varrho_i)^{p-1} - 1 \equiv (r_0 r_i)^{p^{m-1}(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^m},$$

tutti i termini della somma che figura nella (15) per $i \neq i_0$ sono divisibili

per p^m; siccome poi per $i = i_0$, per cui si ha $(\varrho_0 \varrho_{i_0})^\nu - 1 \equiv 0 \pmod{p^m}$ ossia

$$\varrho_{i_0}^\nu \equiv \varrho_0^{-\nu} \pmod{p^m}, \tag{16}$$

risulta

$$\frac{(\varrho_0 \varrho_{i_0})^{p-1} - 1}{(\varrho_0 \varrho_{i_0})^\nu - 1} \equiv \frac{p-1}{\nu} \pmod{p^m},$$

si trae

$$x_\alpha \equiv a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}\alpha} \varrho_{i_0}^{-\alpha} \pmod{p^m}.$$

Dunque x_α è congruo (mod. p^m) alla potenza α^{ima} del numero

$$a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}} \varrho_{i_0}^{-1},$$

che è una soluzione della (10), perchè la potenza ν^{ima} di esso, per la (16) e la (11), è congrua ad a (mod. p^m).

Per $\alpha = 1$ si deduce che *l'espressione*

$$\frac{\nu}{p-1} a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu}} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{\nu}-1} A_k a^{p^{m-1}k}, \tag{17}$$

essendo

$$A_k \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{\nu}} \varrho_i^{\nu k - 1}, \tag{18}$$

è una soluzione della congruenza $x^\nu \equiv a$ *(mod.* p^m*)*.

7. Come applicazione di quest'ultimo risultato determiniamo una soluzione apiristica della congruenza

$$x^2 \equiv a \pmod{p^m}. \tag{19}$$

È facile osservare che i numeri

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

costituiscono un sistema completo di 2° grado (mod. p), e però si può porre per tutti i valori di i da 1 a $\frac{p-1}{2}$:

$$\varrho_i \equiv i^{p^{m-1}} \pmod{p^m},$$

onde, posto

$$s_k \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p^{m-1}(2k-1)} \pmod{p^m},$$

si trae che *l'espressione*

$$\frac{2}{p-1}\, a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}-1} s_k\, a^{kp^{m-1}}$$

è una soluzione apiristica della (19).

Si può anche osservare che è, secondo il mod p^m,

$$s_k \equiv \frac{1}{p^{m-1}} \sum_{i=1}^{\frac{p^m-1}{2}} i^{p^{m-1}(2k-1)} \equiv \frac{1}{p^{m-1}} \cdot \frac{\left(\frac{p^m-1}{2} + \mathrm{B}\right)^{p^{m-1}(2k-1)+1} - \mathrm{B}^{p^{m-1}(2k-1)+1}}{p^{m-1}(2k-1)+1},$$

dove le B sono i numeri di Bernoulli, e, in virtù di note proprietà dei polinomi bernoulliani, si ha

$$s_k \equiv -\frac{2}{p^{m-1}\left[p^{m-1}(2k-1)+1\right]} \left(1 - \frac{1}{2p^{m-1}(2k-1)+1}\right) \mathrm{B}_{p^{m-1}(2k-1)+1} \pmod{p^m}.$$

Infine, introducendo i numeri di Genocchi $\mathrm{G}_r = (2^r - 1)\,\mathrm{B}_r$, che sono interi, si deduce che *l'espressione*

$$(20) \qquad \frac{4}{p^{m-1}(p-1)} \sum_{k=0}^{\frac{p^m-1}{2}} \frac{\mathrm{G}_{p^{m-1}(2k-1)+1}}{2p^{m-1}(2k-1)+1\left[p^{m-1}(2k-1)+1\right]}\, a^{kp^{m-1}}$$

è una soluzione apiristica della congruenza binomia quadratica.

La formola (20) ha importanza solamente teorica: essa mostra che nel caso di $n = 2$ la determinazione dei coefficienti può effettuarsi senza conoscere il numero p.

Formole assai vantaggiose in pratica saranno ottenute nel successivo paragrafo.

§ 3. — *Soluzioni apiristiche ridotte.*

8. La risoluzione di una congruenza binomia di ν^{imo} grado, coi processi esposti nel precedente §, non richiede altro, che la conoscenza di un sistema completo di ν^{imo} grado secondo il mod. p (v. n. 4), per la costruzione del

quale (n. 1) basta la conoscenza delle soluzioni della congruenza $x^\nu \equiv 1 \pmod{p}$. Poichè la risoluzione di quest'ultima si può ricondurre alla risoluzione di congruenze binomie di grado inferiore, si può anche dire che per risolvere una congruenza binomia qualunque *non occorrono tentativi.* Ma in pratica, specialmente per la determinazione delle soluzioni minime positive (*radici*), il metodo riescirebbe assai faticoso.

Invece si prestan bene in questi casi le così dette *soluzioni apiristiche ridotte*, le quali richiedono la conoscenza di qualche elemento dipendente dal modulo, la cui determinazione per tentativi, del resto, non offre alcuna difficoltà pratica.

9. È facile dimostrare che *decomposto* $p-1$ *in due fattori primi fra loro* μ *e* $\frac{p-1}{\mu}$, *il primo dei quali sia multiplo di* ν, *se* γ *e* δ *sono due numeri appartenenti rispettivamente agli esponenti* μ *e* $\frac{p-1}{\mu}$, *secondo il mod.* p, *i numeri*

$$\gamma^r \delta^s \left(r = 0, 1, 2, \ldots, \frac{\mu}{\nu} - 1 \; ; \; s = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{\nu} - 1 \right),$$

formano un sistema completo di ν^{imo} *grado* (*mod.* p).

Allora, posto

$$\varrho \equiv \gamma^{p^{m-1}} \quad , \quad \pi \equiv \delta^{p^{m-1}} \pmod{p},$$

si può nella (14) porre

$$A_k \equiv \sum_{r=0}^{\frac{\mu}{\nu}-1} \sum_{s=0}^{\frac{p-1}{\nu}-1} (\varrho^r \pi^s)^{\nu k - \alpha} \equiv \frac{\varrho^{(\nu k-\alpha)\frac{\mu}{\nu}} - 1}{\varrho^{\nu k-\alpha} - 1} \cdot \frac{\pi^{(\nu k-\alpha)\frac{p-1}{\mu}} - 1}{\pi^{\nu k-\alpha} - 1} \pmod{p^m},$$

da cui si trae subito, se non è $\nu k - \alpha \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{p-1}{\mu} \right)$,

$$A_k \equiv 0 \pmod{p^m},$$

e se invece è $\nu k - \alpha \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{p-1}{\mu} \right)$:

$$A_k \equiv \frac{p-1}{\mu} \frac{\varrho^{(\nu k-\alpha)\frac{\mu}{\nu}} - 1}{\varrho^{\nu k-\alpha} - 1} \pmod{p^m}.$$

Se ne deduce allora che, *se* k_α *è una soluzione della congruenza*

$$\nu x - \alpha \equiv 0 \left(\text{mod.} \frac{p-1}{\mu} \right), \tag{21}$$

l'espressione

$$(22)\qquad -\frac{\nu}{\mu}\,a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{\nu}+p^{m-1}k\alpha}\,\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\,(\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}-1)\sum_{s=0}^{\frac{\mu}{\nu}-1}\frac{a^{s\frac{p^{m-1}(p-1)}{\mu}}}{\varrho^{\nu\left(k_\alpha+s\frac{p-1}{\mu}\right)}-1}$$

è congrua (mod. p^m) alla potenza α-esima di una soluzione apiristica della (10).

In particolare, per $\alpha=1$, una soluzione apiristica della (10) *è*

$$(23)\qquad -\frac{\nu}{\mu}\,a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{\nu}+p^{m-1}k_1}\,(\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}-1)\sum_{s=0}^{\frac{\mu}{\nu}-1}\frac{a^{s\frac{p^{m-1}(p-1)}{\mu}}}{\varrho^{\nu\left(k_1+s\frac{p-1}{\mu}\right)}-1},$$

dove k_1 è una soluzione della congruenza

$$(24)\qquad \nu x-1\equiv 0\quad\left(\text{mod. }\frac{p-1}{\mu}\right).$$

Se ν è primo con $\frac{p-1}{\nu}$ si può porre $\mu=\nu$, e la (23) allora dà, come soluzione apiristica della (10), l'espressione

$$(25)\qquad a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{\nu}+p^{m-1}k_1}.$$

Se si pone $\mu=p-1$, e però $k_\alpha=0$, si ottiene il risultato seguente:
Se g è una radice primitiva di p, l'espressione

$$(26)\qquad -\frac{\nu}{p-1}\,a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{\nu}}\,(g^{\frac{p^{m-1}(p-1)}{\nu}\alpha}-1)\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{\nu}-1}\frac{a^{sp^{m-1}}}{g^{p^{m-1}(\nu s-\alpha)}-1}$$

è congrua alla potenza α^{ima} di una soluzione apiristica della (10).

In particolare, per $\nu=2$ e $\alpha=1$, si ha che l'*espressione*

$$(27)\qquad \frac{4}{p-1}\,a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{2}}\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}-1}\frac{a^{p^{m-1}}}{g^{p^{m-1}(2s-1)}-1}$$

è una soluzione apiristica della congruenza $x^2\equiv a$ (mod. p^m).

10. La (23) può anche mettersi sotto una forma più semplice. A tal fine si osservi che esiste sempre un numero γ_1 appartenente all'esponente μ (mod. p), tale che sia

$$\gamma_1^{\frac{p-1}{\mu}} \equiv \gamma \pmod{p}. \tag{28}$$

Si ponga allora

$$\varrho_1 \equiv \gamma_1^{p^{m-1}} \pmod{p^m} \tag{29}$$

e nella (22) si muti ϱ in ϱ_1. Posto quindi

$$k_\alpha \nu - \alpha = h_\alpha \frac{p-1}{\mu}, \tag{30}$$

e osservando che, per la (28) e la (30), si ha

$$\varrho_1^{\nu\left(k_\alpha + s\frac{p-1}{\mu}\right)-\alpha} \equiv \varrho^{h_\alpha + s\nu} \quad , \quad \varrho_1^{\alpha\frac{\mu}{\nu}} \equiv \varrho^{-h_\alpha\frac{\mu}{\nu}} \pmod{p^m},$$

si ottiene che l'*espressione*

$$-\frac{\nu}{\mu}\, a^{\frac{p^m - 2p^{m-1}+1}{\nu} + p^{m-1}k_\alpha} (\varrho^{h_\alpha\frac{\mu}{\nu}} - 1) \sum_{s=0}^{\frac{\mu}{\nu}-1} \frac{a^{s\frac{p^{m-1}(p-1)}{\mu}}}{\varrho^{h_\alpha + s\nu} - 1} \tag{31}$$

è congrua (mod. p^m) alla potenza α^{ima} di una soluzione della (10).

Applichiamo la (31) al caso di $n = 2$ e $\alpha = 1$. Se 2^r è la più alta potenza di 2 che divide $p-1$, si può porre

$$\mu = 2^r \quad , \quad k_1 = \frac{p + 2^r - 1}{2^{r+1}} \quad . \quad h_1 = 1,$$

e poichè, com'è facile osservare, si ha

$$\varrho^{2^{r-1}} \equiv -1 \pmod{p^m},$$

si conclude che l'*espressione*

$$\frac{1}{2^{r-2}}\, a^{\frac{(2^r+1)\,p^{m-1}(p-1)+2^r}{2^{r+1}}} \sum_{s=0}^{2^{r-1}-1} \frac{a^{s\frac{p^{m-1}(p-1)}{2^r}}}{\varrho^{2s+1} - 1} \tag{32}$$

è una soluzione apiristica della congruenza $x^2 \equiv a$ (mod. p^m).

11. Quando si vogliono calcolare le radici di una congruenza binomia qualunque si assumerà per μ il minimo valore possibile, cioè il prodotto dei fattori primi di n, con quell'esponente col quale entrano in $p-1$.

Se $u, v, w, \ldots$ sono i fattori primi diversi di n, i quali entrano in $p-1$ alle potenze di grado $r, s, t, \ldots$ rispettivamente, si determineranno i numeri $\omega_u, \omega_v, \omega_w, \ldots$ rispettivamente non residui u-ico, v-ico, w-ico, ... di p e si assumerà

$$\gamma \equiv \omega_u^{\frac{p-1}{u^r}} \cdot \omega_v^{\frac{p-1}{v^s}} \cdot \omega_w^{\frac{p-1}{w^t}} \cdots\cdots \pmod{p}.$$

La determinazione dei numeri ω non presenta difficoltà. Conviene allora calcolare colle formole date nei nn. precedenti, per $m=1$, una radice r della congruenza

$$x^\nu \equiv a \pmod{p};$$

si otterrà allora una radice della (10) calcolando il minimo numero positivo congruo (mod. p^m) al numero

$$a^{\frac{p^m-2p^{m-1}+1}{\nu}} \cdot \gamma^{p^{m-1}}.$$

§ 4. — *Risoluzione di una congruenza binomia (mod. p^m), il cui grado è un divisore qualunque di $p^{m-1}(p-1)$.*

12. Supponiamo ora che il grado n della conguenza

$$x^n \equiv a \pmod{p^m} \tag{33}$$

sia un divisore qualunque di $p^{m-1}(p-1)$, e poniamo $n = p^r\nu$, dove ν è primo con p.

Si possono sempre determinare due numeri interi α e β tali che sia soddisfatta la congruenza

$$\alpha p^r + \nu\beta \equiv 1 \quad [\text{mod. } p^{m-r-1}(p-1)]. \tag{34}$$

Sia y_0 una soluzione della congruenza

$$y^{p^r} \equiv a^\beta \pmod{p^m}$$

e x_1 una soluzione della congruenza

$$x^\nu \equiv a \pmod{p^m},$$

sarà allora $y_0 x_1^\alpha$ una soluzione della (38). Infatti si ha

$$(y_0 x_1^\alpha)^n \equiv y_0^{p^r\nu} \cdot x_2^{\alpha p^r\nu} \equiv a^{\nu\beta+\alpha p^r} \equiv a \pmod{p^m}.$$

Ora si soddisfa alla (34) prendendo

$$\alpha = p^{m-r-1} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{p^{m-r} - 2p^{m-r-1} + 1}{\nu}; \tag{35}$$

quindi, moltiplicando una qualunque delle formole ottenute nel § precedente, per $\alpha = p^{m-r-1}$, con la (14) della Nota 1ª, dove sia mutato a in a^β per il valore di β dato dalla (35), si ottiene una soluzione apiristica della congruenza (33).

Fisica-matematica. — *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

L'importanza dello studio di alcune equazioni funzionali nella teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, è stata notata, or sono alcuni anni, dai sigg. E. e F. Cosserat (1). La nuova e importantissima risoluzione delle equazioni e dei sistemi di equazioni integrali ottenuta dal sig. Fredholm (2), che ha già avute notevolissime applicazioni nella teoria del potenziale e in analisi, doveva naturalmente promuovere gli studi già iniziati dai sigg. Cosserat e permettere inoltre di stabilire, con minor difficoltà, i teoremi di esistenza per i problemi di equilibrio elastico.

Il sig. Fredholm (3) ed il prof. Lauricella (4) si sono occupati di ridurre il problema dell'equilibrio, quando al contorno sono fissati gli spostamenti, ad un sistema di equazioni integrali del tipo generale considerato appunto nella teoria del sig. Fredholm.

Non credo inutile esporre anzitutto in altro modo una tale riduzione.

Supponiamo eliminate le forze di massa e quindi ridotte le equazioni di equilibrio alla forma

$$(1) \quad \Delta_2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta_2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \quad , \quad \Delta_2 w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 .$$

È noto che, quando sono dati i valori al contorno delle funzioni incognite u, v, w, il sistema (1) ammette al più una soluzione, purchè

$$-1 < k < +\infty ;$$

cioè, rammentando la relazione che intercede tra k e la costante $\varkappa$ di Poisson, per ogni valore di $\varkappa$ non appartenente all'intervallo: $\frac{1}{2}, 1$.

(1) *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité.* [Comptes rendus de l'Académie d. Sciences de Paris; t. 133, 2e sem. 1901, pp. 210-213].

(2) Ci riferiamo sempre alla Memoria: *Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta math. 27, pp. 365-390, 1903]. Si può consultare una estesa bibliografia dell'argomento nel recente lavoro del sig. H. Bateman: *The Theory of Integral Equations* [Proceed. of the London mathem. Society. Sec. ser., vol. 4, pp. 90-115, 1907].

(3) *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgifvet af K. Svenska Vetenkapsakademien i Stockholm. B. 2, Häfte 3-4, 1905].

(4) *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi* [Rend. R. Acc. d. Lincei, aprile 1906]. Vedi anche le Note del giugno e luglio stesso anno.

Partendo da noti integrali particolari delle (1), assegnati dal prof. Cerruti, si deduce agevolmente che le funzioni

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\ ,\ -\lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\ ,\ -\lambda r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\ ,$$

e le altre due terne dedotte con permutazioni circolari, soddisfano alle (1).

Indichiamo qui con r la distanza di un punto qualunque (x, y, z) da un punto (ξ, η, ζ) del contorno σ del corpo; con n la normale interna e infine:

$$\lambda = \frac{k}{k+2}$$

è precisamente la costante che figura nei recenti lavori del sig. Korn.

Rappresentiamo con $\varphi(\sigma), \psi(\sigma), \chi(\sigma)$ tre funzioni qualunque finite e continue dei punti di σ; se poniamo

$$(2)\qquad \begin{aligned} u(x, y, z) = {} & \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \\ & -\frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\psi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\chi(\sigma)\right)d\sigma \end{aligned}$$

e due formule analoghe per v e w, otterremo ancora un sistema di soluzioni delle (1).

Consideriamo anzitutto i valori di u, v, w nei punti i interni a σ, e accenniamo rispettivamente con U_i e U_i' il primo ed il secondo integrale della prima delle (2).

U_i rappresenta la funzione potenziale di un doppio strato di σ col momento continuo $\frac{1}{2\pi}\varphi(\sigma)$. Se facciamo tendere il punto i ad un punto s del contorno, sappiamo che

$$U_{is} = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,;$$

l'integrale a secondo membro esprime il valore che U_i prende nel punto s; in altre parole, r rappresenta ora la distanza del punto s da un altro punto σ entrambi appartenenti al contorno. Questa relazione, nella ipotesi della continuità di $\varphi(\sigma)$, vale, com'è noto, per condizioni molto generali sul contorno σ. Ma, per quanto dovremo dire tra poco, noi vogliamo supporre che il con-

torno σ soddisfi alle condizioni del Liapunoff [1], o a quelle alquanto più restrittive e nettamente enunciate dal sig. E. R. Neumann [2].

L'integrale a secondo membro, sempre proprio, rappresenta una funzione continua dei punti di σ e la funzione che figura sotto vincolo integrale, col tendere di σ ad s diventa infinita come $\frac{1}{r}$. Basta rammentare che [3]

$$\left|\frac{\cos(rn)}{r^2}\right| \leq \frac{1}{2\beta_g},$$

dove β_g è una costante finita e diversa da zero.

Consideriamo la funzione U_i. È agevole convincersi che essa è continua anche quando i tende ad s. Infatti è:

$$r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} = \left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right]\frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \quad r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn};$$

e si può scrivere:

$$\int r\cos(rn)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right][\varphi(\sigma) - \varphi(s)]\,d\sigma + \varphi(s)\int\left[3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 1\right]d\sigma.$$

L'ultimo integrale è nullo, qualunque sia la posizione del punto i anche su σ; e del primo si dimostra subito la continuità [4]. Lo stesso può ripetersi per gli altri integrali di U_i', perchè è pure

$$\int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma = 0$$

qualunque sia la posizione di i.

[1] *Sur quelques questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* [Journ. de mathém. Vol. 4 (5) pp. 241-311; 1898].

[2] *Studien ü. die Methoden von C. Neumann u. G. Robin zur Lösung d. beiden Randwertaufgaben d. Potentialtheorie* [Preisschriften gekrönt u. herausgeg. v. den fürst. Jablonowki' schen Gesell. z. Leipzig, 1905, pp. 1-3].

[3] E. R. Neumann, oper. cit., pag. 5.

[4] Basta ripetere la dimostrazione di C. Neumann: *Ueb. die Methode des arith. Mittels* [Abhand. d. mathem.-phys. Classe der K. sächsischen Gesell. d. Wiss. zu Leipzig. Bd. 13, pp. 707-820, 1887].

Se dunque facciamo tendere i ad s e diciamo $u(s)$ il limite di u_i, otteremo:

$$(3)\qquad \begin{aligned} u(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \\ - \frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\psi(\sigma) + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\chi(\sigma)\right)d\sigma \end{aligned}$$

e due analoghe per $v(s)$ e $w(s)$.

Ecco dunque stabilito un sistema di equazioni integrali del tipo del sig. Fredholm, poichè le varie funzioni che moltiplicano le incognite sotto vincolo integrale, col tendere di σ ad s diventano infinite solamente come $\frac{1}{r}$. Se i valori $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ sono gli spostamenti assegnati al contorno, risolvendo il sistema (3) e poscia sostituendo i valori trovati per φ, ψ, χ in (2), avremo una soluzione del problema proposto.

Le φ, ... sono funzioni meromorfe di λ, purchè il determinante dell'unica equazione integrale, a cui si riconduce il sistema (3) col metodo del sig. Fredholm, non sia identicamente nullo; chè in tal caso il sistema o non avrebbe soluzione o ne avrebbe infinite, qualunque sia λ. Ora $\lambda = 0$ non è un valore eccezionale per (3), come vedremo; e per tal valore il sistema assume la forma semplicissima

$$u(s) = \varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma\,,\ \text{ecc.},$$

che ammette sempre una e una sola soluzione; infatti è noto che la corrispondente equazione omogenea ha la sola soluzione $\varphi(s) = 0$ (1). Dunque è impossibile che il determinante sia nullo e il sistema (3) ammette sempre una soluzione e una sola, per k soddisfacente alla condizione posta in principio.

Lo stesso metodo è applicabile alla risoluzione del problema elastico *esterno*, cioè alla integrazione di (1) nello spazio esterno e alla superficie σ. Basterà considerare (2) in un punto esterno e poscia, come prima, passare al limite; troveremo il sistema integrale

$$(4)\qquad \begin{aligned} u(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int \varphi(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \\ - \frac{\lambda}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\varphi(\sigma) + \cdots\right)d\sigma\,. \end{aligned}$$

(1) È in fondo il cosidetto teorema della *costanza del momento di un doppio strato* del signor E. R. Neumann, oper. cit., pag. 51. V. anche la seconda delle note citate del sig. Fredholm.

Il sistema omogeneo corrispondente ammette la soluzione evidente $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$, $\chi = \text{cost.}$, e lo stesso dicasi pure della equazione omogenea risultante. Il determinante dell'equazione risultante è dunque identicamente nullo; supponiamo del pari che siano nulli i suoi minori fino a quello di ordine m; allora il sistema omogeneo ammetterebbe m soluzioni indipendenti per qualunque valore di λ (che non sia eccezionale). Ma per $\lambda = 0$ il sistema si riduce a

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\sigma) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma, \text{ ecc.},$$

che ammette la sola soluzione $\varphi = \text{cost.}$, ecc: dunque anche il sistema omogeneo relativo a (4) ammetterà la soluzione unica assegnata [1].

Perchè in tal caso (4) ammetta soluzione, le $u(s)$... debbono soddisfare ad una relazione. Dovremo infatti considerare il sistema *aggiunto* o *associato* al sistema omogeneo di (4), che ammetterà pure una sola soluzione Φ, Ψ, X (diversa da quella del sistema, eccetto in casi particolari, cerchiosfera). La relazione da essere soddisfatta è la seguente:

$$\int [u(\sigma)\, \Phi(\sigma) + \cdots] \, d\sigma = 0 .$$

Se questa non è soddisfatta si procede nel modo indicato dal prof. Lauricella [2].

Nel caso di un suolo elastico isotropo, la risoluzione di (3) è immediata.

Infatti essendo r la distanza tra due punti s e σ del piano limite, $r\cos(rn)$ e $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$ sono nulli; quindi

$$u(s) = \varphi(s) \quad , \quad v(s) = \psi(s) \quad , \quad w(s) = \chi(s) .$$

Sostituendo questi valori nelle (2) si ottengono le formule risolutive; e se in particolare il piano limite è $z = 0$ e si chiamano x, y, z le coordinate del punto in cui si vuol calcolare la deformazione, con facili e rapide trasformazioni si riottengono le formule del Cerruti [3].

(1) E. R. Neumann, oper. cit.. pag. 50.

(2) Rend. R. Acc. d. Lincei, giugno 1906.

(3) Un fatto quasi analogo accade quando si voglia risolvere col metodo del Fredholm il problema (interno o esterno) di Dirichlet pel cerchio. In tal caso l'applicazione delle formule di Fredholm conduce alla ben nota formula risolutiva con speditezza ed eleganza.

In questo caso le componenti di spostamento sono adunque funzioni lineari di λ.

Se quindi si vuol soddisfare al problema con una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di λ, come appunto fa in generale il sig. Korn (1), si può già prevedere, come aveva notato il compianto prof. Cesàro (2), che la serie si ridurrà ad un numero finito di termini e si ha così un altro metodo, rapido ed elegante, per la risoluzione del problema di Boussinesq-Cerruti. Non è, credo, superfluo notare che lo stesso metodo può essere applicato anche alla sfera. Pongasi infatti

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$$

e analogamente per v e w, e dove u_0, v_0, w_0 sono armoniche e in superficie assumono i valori assegnati $u(s), \ldots$; le $u_1, \ldots u_2, \ldots$ nulle al contorno, soddisfano alle equazioni

$$\Delta_2 u_1 + 2\frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta_2 u_2 - \Delta_2 u_1 + 2\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0, \ldots;$$

$\theta_0, \theta_1, \ldots$ sono le dilatazioni cubiche corrispondenti agli spostamenti $u_0, \ldots$; $u_1, \ldots$; ecc. La u_0 è subito data da una formula ben nota; si deduce poi che (3)

$$\theta_0 = -\frac{1}{4\pi a}\int \mathrm{H} s \, d\sigma = \Phi.$$

La funzione Φ è armonica e quindi la u_1 è biarmonica e si annulla al contorno. Porremo dunque

$$u_1 = (\varrho^2 - a^2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \ldots ; \ \theta_1 = 2\varrho \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho} ,$$

e si troverà

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{2}\varrho^{-\frac{3}{2}}\int_0^\varrho \varrho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\varrho$$

$$\Delta_2 u_2 = 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} .$$

(1) Comptes rendus, t. 142, février 1906, pp. 334-336; Sitzungsb. d. math.-phys. Klasse der K. B. Akad. d. Wiss. zu München. B. XXXVI, pp. 37-80.

(2) Rend. R. Acc. di Scien. fisiche e matem. di Napoli, luglio 1906. Nel caso che sul piano limite siano date le forze, il Cesàro sviluppa invece secondo le potenze di $\frac{3\lambda - 1}{2\lambda} = 1 - \frac{1}{k}$, ottenendo uno sviluppo limitato ai primi due termini. Lo stesso metodo conduce ancora alla risoluzione dei così detti casi *misti* o *alterni*.

(3) Per i calcoli e le notazioni mi riferisco alla mia: *Teoria mat. d. equil. d. corpi elastici*, Milano, 1904, pp. 282-287.

E qui si procederà allo stesso modo, ponendo

$$u_2 = (\varrho^2 - a^2)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \ldots .$$

con

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{2}\varrho^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\varrho} \varrho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\,d\varrho = -\frac{1}{4}\varrho^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^{\varrho}\varrho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,d\varrho;$$

e così di seguito.

Ora con successive integrazioni per parte si riconosce che

$$\lambda\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \cdots$$

equivale a:

$$\varrho^{\frac{\lambda-3}{2}}\int_0^{\varrho}\varrho^{-\frac{\lambda}{2}}\cdot\varrho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,d\varrho,$$

e quindi si riottengono le formule del prof. Almansi.

Deduciamo ancora alcuni dei risultati dei sigg. Cosserat [1].

Sia λ_1 un polo di ordine m delle soluzioni φ, ψ, χ del sistema (3) e si ponga:

$$\varphi = \frac{u_1}{(\lambda-\lambda_1)^m} + \cdots, \quad \psi = \frac{v_1}{(\lambda-\lambda_1)^m} + \cdots, \quad \chi = \frac{w_1}{(\lambda-\lambda_1)^m} + \cdots$$

Sostituendo in (3), moltiplicando per $(\lambda-\lambda_1)^m$ e poscia facendo $\lambda = \lambda_1$ si trova

$$0 = u_1(s) + \frac{1}{2\pi}\int u_1(\sigma)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda_1}{2\pi}\int r\cos(rn)\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}u_1(\sigma) + \cdots\right)d\sigma, \text{ ecc.};$$

sicchè u_1, v_1, w_1 è una soluzione delle equazioni di equilibrio per $\lambda = \lambda_1$, diversa da zero e che si annulla al contorno; cioè una soluzione *fondamentale* o *eccezionale*.

Due di queste soluzioni soddisfano ad una relazione di ortogonalità. Infatti se k_1 e k_2 sono i valori di k corrispondenti a λ_1 e λ_2, dalle (1) deduciamo subito:

$$\int(u_2 \Delta_2 u_1 + \cdots)\,d\tau = k_1\int\theta_1\theta_2\,d\tau$$

$$\int(u_1 \Delta_2 u_2 + \cdots)\,d\tau = k_2\int\theta_1\theta_2\,d\tau.$$

[1] *Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données* [Comptes rendus, t. 133, juillet 1901, pp. 145-147].

I primi due integrali, pel 2° lemma di Green, sono eguali; quindi per $k_1 \neq k_2$ risulta

$$\int \theta_1 \theta_2 \, d\tau = 0 .$$

Da questa relazione, al modo solito, si deduce che *i poli sono reali.*

È poi chiaro che tali poli debbono cadere tra -1 e $-\infty$. Del resto si può osservare che

$$\int (u_1 \Delta_2 u_1 + \cdots) \, d\tau = k_1 \int \theta_1^2 \, d\tau = -\int [(\operatorname{grad} u_1)^2 + \cdots] \, d\tau ;$$

dunque k_1 è negativo.

Poscia, osservando che

$$\int \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \, d\tau = \int \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \, d\tau , \text{ ecc.}$$

si deduce pure

$$\int [(\operatorname{grad} u_1)^2 + \cdots] \, d\tau = \int \theta_1^2 \, d\tau + 4 \int \operatorname{rot}^2 s_1 \, d\sigma ,$$

indicando con s_1 lo spostamento (di componenti u_1 , v_1 , w_1). Dunque

$$|k_1| > 1 .$$

Com'è noto il fatto che i valori eccezionali sono reali, è comune ad una estesa classe di equazioni integrali. Infatti il sig. Hilbert (1) ha dimostrato che se la $f(x , y)$ (il Kern dell'equazione integrale) è simmetrica in x ed y, le radici del determinante dell'equazione sono reali. Si può enunciare un teorema alquanto più generale, e relativo anche ai sistemi di equazioni integrali, come pure altri teoremi relativi alla semplicità dei poli, e che permettono di dedurre assai agevolmente moltissimi teoremi del sig. Plemelj (2); ma su questi insisterò in altra occasione.

(1) *Grundzüge e. allg. Theorie der linearen Integralgleichungen.* Erste Mitt. [Nachrichten d. K. Gesell. d. Wiss. zu Göttingen, 1904, Heft 1, pag. 63].

(2) *Ueb. lineare Randwertaufgaben d. Potentialtheorie* [Monatshefte für Mathem. u. Physik, XV Jahrg.].

Matematica. — *Sull'equazione della propagazione del calore in un filo.* Nota del prof. Giuseppe Picciati, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

In una Nota (1) dei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences il prof. Volterra ha dato un metodo generale per l'integrazione dell'equazione della propagazione del calore, a due variabili, ed ha stabilito una formula che, sotto un'unica espressione, racchiude i diversi tipi di integrali di questa equazione. L'applicazione del metodo del Volterra e l'uso della funzione di Green (così chiamata dal Sommerfeld perchè compie nel problema della propagazione del calore l'ufficio che nella teoria del potenziale compie la funzione di Green) permettono di rappresentare, in forma semplice e compendiosa, l'integrale tenendo conto delle condizioni ai limiti che valgono a caratterizzarlo. In questa breve Nota mi propongo di assegnare, con tale procedimento, l'espressione esplicita dell'integrale in un caso particolare. Si tratta di un risultato sostanzialmente noto, ma non mi pare superfluo presentarne una deduzione semplice, tanto più che delle formule alle quali così si perviene mi varrò prossimamente nello studio di alcuni problemi idrodinamici (moto dei solidi nei liquidi viscosi) che si possono ricondurre alla stessa questione analitica.

Si consideri l'equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(z,t)$$

della quale si voglia determinare l'integrale soddisfacente alle condizioni

$$(2) \qquad (u)_{z=0} = \varphi(t) \quad ; \quad (u)_{z=h} = \psi(t) \quad ; \quad (u)_{t=0} = \chi(z),$$

essendo h una costante positiva, φ, ψ, χ funzioni arbitrarie (2) degli argomenti indicati.

Chiamiamo per un momentn ζ, τ le variabili (anzichè z e t) da cui dipendono u ed f, e consideriamo un campo σ in cui non cada alcuna singolarità di queste funzioni. Prendiamo (vedi figura) come campo σ il rettangolo delimitato dalle rette $\zeta = 0$, $\zeta = h$, $\tau = 0$, $\tau = t$, essendo t parametro positivo.

(1) *Sur les équations différentielles du type parabolique*, Paris, 5 dec. 1904.

(2) Si intende arbitrarie in senso fisico; in particolare tali da rendere effettivamente eseguibili le operazioni di calcolo indicate nel testo.

Consideriamo, insieme all'equazione

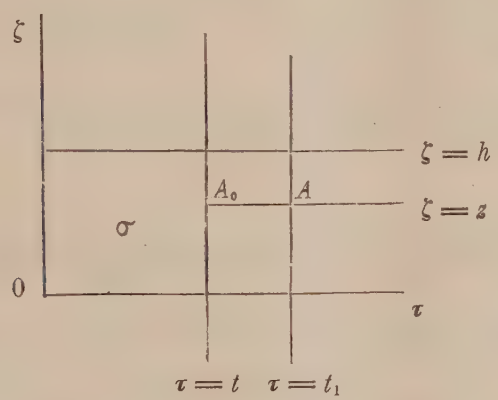
$$(1)' \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + f(\zeta, \tau),$$

una soluzione u_1 dell'altra equazione

$$(3) \qquad -\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2},$$

pure senza singolarità nel campo σ che si considera; moltiplicando la (1)' per u_1 e la (3) per u e sottraendo si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(u u_1) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right) + u_1 f,$$



quindi anche

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(u u_1) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)\right] d\sigma = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma.$$

Colla formula di Gauss, se s è il contorno del campo σ, otteniamo

$$\int_s \left[u u_1 \, d\zeta + \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right) d\tau\right] = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma,$$

ossia

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\int_0^h (u u_1)_{\tau=t} \, d\zeta + \int_t^0 \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau + \\ &+ \int_h^0 (u u_1)_{\tau=0} \, d\zeta + \int_0^t \left(u_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau = \int_\sigma u_1 f \, d\sigma. \end{aligned}$$

Sia ora A un punto di coordinate $\zeta = z$, $\tau = t_1$, ove $0 < z < h$, $t_1 > t$ e si consideri l'integrale u_1 della (3) analogo alla funzione di Green (1), cioè

$$(5) \qquad u_1 = (t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{\frac{-(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t_1-\tau)}} - e^{\frac{-(\zeta + z + 2nh)^2}{4(t_1-\tau)}} \right\};$$

esso soddisfa alle condizioni seguenti:

1ª per $\lim (t_1 - \tau) = 0$ si annulla salvo che per $\zeta = z$, cioè nel punto A, dove diviene infinito come la soluzione fondamentale

$$(t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(\zeta - z)^2}{4(t_1-\tau)}};$$

2ª soddisfa alle condizioni limiti

$$(6) \qquad (u_1)_{\zeta=0} = 0 \quad (u_1)_{\zeta=h} = 0;$$

3ª non ha singolarità nel campo σ.

Ad esso si può dare anche un'altra forma valendosi della funzione ϑ_3 di Jacobi; infatti si può porre (2)

$$\vartheta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right) = \frac{h}{\pi\sqrt{t_1 - \tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(\zeta - z - 2nh)^2}{4(t_1-\tau)}},$$

quindi risulta

$$(7) \qquad u_1 = \frac{\pi}{h}\left\{\vartheta_3\left(\frac{\zeta - z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{\zeta + z}{2h}, \frac{i\pi(t_1 - \tau)}{h^2}\right)\right\}.$$

Avendo riguardo alle condizioni (2) e (6) risulta dalla (4)

$$\int_0^h (u\,u_1)_{\tau=t}\, d\zeta - \int_t^0 \psi(\tau)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=h} d\tau +$$
$$+ \int_h^0 \chi(\zeta)\,(u_1)_{\tau=0}\, d\zeta - \int_0^t \varphi(\tau)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} d\tau = \int_\sigma u_1 f\, d\sigma.$$

Spostiamo ora il punto A sulla retta $\zeta = z$, avvicinandolo indefinitamente al punto A_0 di coordinate z, t: avremo dalla formula precedente che

$$\lim_{t_1=t} \int_0^h (u\,u_1)_{\tau=t}\, d\zeta = \int_0^t \varphi(\tau)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=0 \\ t_1=t}} d\tau -$$
$$- \int_0^t \psi(\tau)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=h \\ t_1=t}} d\tau + \int_0^h \chi(\zeta)\,(u_1)_{\substack{\tau=0 \\ t_1=t}} d\zeta + \int_\sigma (u_1)_{t_1=t}\, f\, d\sigma.$$

(1) Vedi Sommerfeld, Math. Ann. 45, 1894, *Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung.*

(2) Vedi Poincaré, *Théorie de la propagation de la chaleur*, pag. 93.

Ma per le proprietà della funzione u_1 è

$$\lim_{t_1=t} \int_0^h (u u_1)_{\tau=t} \, d\zeta = 2\sqrt{\pi}\, u(z, t),$$

quindi otteniamo

$$2\sqrt{\pi}\, u(z, t) = \int_0^t \varphi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=0 \\ t_1=t}} d\tau -$$

$$- \int_0^t \psi(\tau) \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\zeta=h \\ t_1=t}} d\tau + \int_0^h \chi(\zeta) \, (u_1)_{\substack{\tau=0 \\ t_1=t}} d\zeta + \int_\sigma (u_1)_{t_1=t} f \, d\sigma \tag{8}$$

avendo u_1 l'espressione (5) o (7): questa $u(z, t)$ è l'integrale della (1) soddisfacente alle condizioni (2).

Nel caso in cui sia h infinito, e le condizioni ai limiti siano

$$(u)_{z=0} = 0 \quad , \quad (u)_{z=\infty} = 0 \quad , \quad (u)_{t=0} = \chi(z), \tag{2'}$$

la u_1 assume la forma semplice

$$u_1 = (t_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \left\{ e^{\frac{-(\zeta - z)^2}{4(t_1 - \tau)}} - e^{\frac{-(\zeta + z)^2}{4(t_1 - \tau)}} \right\}, \tag{5'}$$

e la (8) dà

$$2\sqrt{\pi}\, u(z, t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, e^{\frac{-z^2}{4(t-\tau)}} (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} z \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \chi(\zeta) \left[e^{\frac{-(\zeta - z)^2}{4t}} - e^{\frac{-(\zeta + z)^2}{4t}} \right] d\zeta + \int_\sigma \left[e^{\frac{-(\zeta - z)^2}{4(t-\tau)}} - e^{\frac{-(\zeta + z)^2}{4(t-\tau)}} \right] \frac{f}{\sqrt{t - \tau}} \, d\sigma . \tag{8'}$$

Mostrerò in una prossima Nota come queste formole trovano utile applicazione nella teoria dei fluidi viscosi.

Fisica — *Sulla durata dell'emissione catodica nei tubi a vuoto.* Nota del dott. Pietro Doglio, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Misure di viscosità sopra i cristalli fluidi del Lehmann* (1). Nota del dott. Luigi Puccianti, presentata dal Socio A. Ròiti.

I cristalli fluidi del Lehmann sono assai conosciuti, hanno una letteratura molto vasta, sopra la loro costituzione si è molto discusso.

Tra varie esperienze, parte già eseguite, parte in via di esecuzione su queste sostanze, comunico qui alcune misure di viscosità, che potranno interessare gli studiosi della questione.

Misure di questo genere erano state fatte in passato dallo Schenck (2) sopra il *benzoato di colesterile* e sopra il *paraazossianisolo*.

Egli trova per questo una viscosità decrescente col crescere della temperatura tanto allo stato anisotropico o torbido, quanto a quello isotropico o limpido; ma al punto di trasformazione del primo stato nel secondo, un aumento brusco e notevole di viscosità.

Per la prima sostanza invece Schenck indicherebbe al punto di trasformazione un piccolo decremento, ma è da notarsi:

1. Che la sostanza si altera durante le misure.

2. Che il resultato di Schenck non potendo, appunto per ciò, essere fondato su molte misure, è ottenuto con una estrapolazione un po' ardita.

3. Che infine il benzoato di colesterile non ha un punto di fusione ben netto e appartiene piuttosto alla classe dei cristalli semifluidi che a quella dei veri e proprî cristalli fluidi.

L'argomento della viscosità si presentava adunque assai interessante, tanto più che il resultato veramente attendibile, cioè quello del paraazossianisolo, è il più curioso, anzi a prima giunta sorprendente.

Con l'aiuto del sig. Gian Carlo Conestabile ora dottore, allora laureando in chimica (3), feci parecchie di queste misure sopra il benzoato di colesterile, sul paraazossianisolo e sul paraazossifenetolo, che acquistammo dalla nota fabbrica Merck di Darmstadt, usando il metodo del flusso per tubi sottili.

Il viscosimetro in vetro era fatto secondo il solito di due ampolline uguali a forma di pipetta (una delle quali munita di due segni di affioramento) congiunte da un tubo capillare ben calibro. Esso era mantenuto in un bagno di paraffina fusa, la cui temperatura era regolata da un termostato

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

(2) Zeitschrift für Phys. Chemie, vol. 27, pag. 167. 1893.

(3) E a lui i miei vivi e ben meritati ringraziamenti.

e misurata con un termometro in mezzi gradi di Geissler in vetro normale di Jena. Le due ampolline erano connesse a una chiavetta a tre vie, che permetteva di far comunicare una di esse con l'aria libera e l'altra con un gran recipiente immerso nell'acqua, nel quale l'aria era stata precedentemente un poco compressa. Girando la chiavetta, le comunicazioni potevano essere scambiate, e così il liquido si faceva passare dall'una all'altra ampolla e viceversa. La pressione era determinata con un manometro a mercurio, e il tempo del flusso con un conta-secondi. Il viscosimetro fu tarato mediante l'acqua distillata a 20°, la cui viscosità rispetto a quella a zero è 0,562 (1), e furono calcolati per tal via i valori della viscosità riferiti all'acqua a zero presa uguale a 100.

Per il benzoato di colesterile furon fatte diverse serie di misure che non risultarono ben concordanti, perchè la sostanza si alterava con un riscaldamento prolungato; le serie, che per essere la sostanza più fresca, paiono più attendibili, dànno un piccolo salto in aumento al punto di trasformazione, che si trova a 177°.

Temperatura	Viscosità (acqua a 0° = 100)	
169°	440	torbido
172	427	
175	445	
Trasformazione:		
178	482	limpido
171°	426	torbido
171,2	427	
175,5	455	
Trasformazione:		
179	494	limpido
187	374	

Lo Schenck non poteva certo dedurre il piccolo salto in più con quattro misure a temperature troppo lontane tra loro; se il suo risultato porta invece un salto in meno, ciò si deve più che alla discrepanza tra le misure, alla sua estrapolazione in linea retta. Però le misure successive, a causa della alterabilità della sostanza, davano notevoli divergenze; e quindi questo punto è ancora un po' incerto.

(1) Landolt und Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen. 1894.

Invece il paraazossianisolo che si presta bene alle misure, mi dette resultati concordanti con quelli di Schenck.

Temperatura	Viscosità (acqua a 0° = 100)	
123°	141	torbido
125	135	
127,1	133	
128,1	132	
129,2	131,5	
130,9	131,5	
134	137	
Trasformazione:		
135	173	limpido
136,5	169	

Per il paraazossifenetolo, che non era stato studiato prima, ottenni i seguenti resultati:

1ª Serie.			2ª Serie.		
Temperatura	Viscosità (acqua a 0° = 100)		Temperatura	Viscosità (acqua a 0° = 100)	
			152°,5	76,4	torbido
			156,2	76,0	
160°	74	torbido	158,6	72,4	
165	76,5		163,4	73,3	
166	81,7		165,8	81,8	
Trasformazione:					
167	135	limpido	166,6	117,0	limpido
170	115		167,3	117,0	
			176,1	102,0	

Dunque l'aumento al punto di trasformazione è chiaro anche per questo composto e anzi più notevole che per il precedente. Prima della trasformazione vi è un intervallo di temperatura, in cui la viscosità cresce gradatamente, come uno stadio di preparazione, che è meno avvertibile per il paraazossianisolo.

Parrebbe adunque che fosse caratteristico per i cristalli liquidi di essere meno vischiosi dei liquidi isotropi .in cui si trasformano. Questa proprietà

che a prima giunta urta col buon senso, se si guardi bene, va d'accordo con le tre diverse ipotesi che si son messe avanti sulla loro natura.

Si accorda, o almeno non è in contrasto coll'opinione di Tammann, che essi siano specie di emulsioni, e con quella di Quincke che essi contengano minutissimi cristallini; perchè queste particelle o liquide o solide, sciogliendosi, potrebbero benissimo accrescere la viscosità del solvente più che non facciano, fin che rimangono in sospensione.

Ma si spiega bene anche nel concetto del Lehmann, che si tratti cioè di veri e proprî cristalli liquidi, cioè di liquidi le cui particelle scorrano le une rispetto alle altre, mantenendo un certo ordinamento. E in vero se si ammette quest'ordinamento delle particelle, e anche conseguentemente dei loro moti, è logico pensare che gli strati in cui esse sono schierate possano scorrere l'uno sull'altro più facilmente che se l'ordinamento non ci fosse.

Dunque le misure di viscosità in fondo non ci dicono nulla di concludente almeno da sole. Spero che diranno di più dell'esperienze in cui l'azione meccanica sia combinata con opportune osservazioni ottiche.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica dei metalli fra temperature molto alte e molto basse* [1]. Nota del dott. Guido Niccolai, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

§ 1. Arndtsen [2] e poi il Matthiessen e Bose [3] furono i primi a studiare l'influenza della temperatura sulla conducibilità elettrica dei metalli. Matthiessen e Bose estesero le ricerche a un certo numero di metalli puri fra 0° e 100°, e calcolarono anche i coefficienti α di temperatura in questo stesso intervallo. Dai loro valori risulta anzitutto che la resistenza aumenta colla temperatura, ed in oltre, come già aveva osservato Arndtsen [4], che i valori di α per tutti i metalli puri (eccettuato quello del ferro che ha un valore molto maggiore), sono compresi fra 0,00403 e 0,00327.

Il Clausius [5] osservò che la media di tutti questi valori (eccettuato il ferro) era prossimamente uguale a 0,00366, e cioè a quello stesso numero che esprime il coefficiente di dilatazione dei gas. Egli appunto per questo credette di poter concludere che la resistenza elettrica dei metalli puri fosse proporzionale alla temperatura assoluta, in modo che la formula:

$$R_t = R_o(1 + 0{,}00366 \cdot t)$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

(2) Pogg. Ann. 1858, CIV, pag. 650.

(3) Pogg. Ann. 1862, CXV, pag. 355.

(4) Pogg. Ann. 1858, CIV, 1.

(5) Pogg. Ann. 1858, CIV, pag. 650.

ne rappresentasse con sufficiente approssimazione la variazione in funzione della temperatura.

Però lo stesso Clausius si accorse che i dati di Matthiessen e Bose non erano sufficienti per trarre una conseguenza di tal genere, sia perchè il numero dei metalli studiati era troppo piccolo, sia anche perchè l'intervallo di temperatura utilizzato era troppo ristretto, e la concordanza nei resultati troppo imperfetta. D'altra parte però egli pensava che la sua osservazione non fosse priva d'interesse, e si riprometteva che servisse di incitamento a fare delle nuove ricerche.

§ 2. Ed infatti diversi sperimentatori in seguito si sono occupati a questo riguardo, aumentando così non solo il numero dei metalli studiati, ma migliorando le condizioni di esperienza, ed utilizzando intervalli di temperatura maggiori.

Così il Benoit (1) ha studiato la variazione della resistenza elettrica di un certo numero di metalli da 0° fino a temperature altissime, ed ha trovato che essa cresce sempre gradatamente; ma ora più, ora meno di quello che vorrebbe l'ipotesi emessa da Clausius. Egli ha in oltre calcolato i valori dei coefficienti α e β della formula

$$R_t = R_o(1 + \alpha t + \beta t^2)$$

colla quale ha rappresentato la variazione della resistenza colla temperatura. I valori assoluti da lui trovati non si possono peraltro confrontare con quelli degli sperimentatori più recenti, come Dewar e Fleming (2) da una parte, e Jäeger e Diesselhorst (3) dall'altra, in causa della diversa purezza dei prodotti su cui è stato rispettivamente sperimentato.

Altre ricerche ad alte temperature sono state eseguite da H. Le-Chatelier (4) sopra il rame, il platino e l'argento; dal prof. Battelli (5) sopra il nichel; dal Morris (6) per il ferro, e finalmente da Phylip. Harrison (7) per il nichel, il ferro, ed il rame, e tutti questi sperimentatori hanno trovato che la resistenza cresce enormemente colla temperatura.

§ 3. Anche a basse temperature furono eseguite delle ricerche di tal genere, ed i primi fisici che si occuparono di ciò sono il Cailletet ed il Bouty (8) i quali misurarono la resisistenza elettrica specifica del mercurio,

(1) C. R. CXXVI, 1873, pag. 342.
(2) Journ. de Phys. 1894, pag. 378 e Phil. Mag. 1894 (36), pag. 271.
(3) Abh d. Physikalisch-Techinischen Reichsanstalt 3, 269, 1900.
(4) C. R. 1890, CXI, pag. 454.
(5) Nuovo Cimento, 1893, III (34), pag. 125.
(6) Phil. Mag. 1897, (44), pag. 213.
(7) Phil. Mag. 1902, III, pag. 177.
(8) Journal de Phys. 1885.

dell'argento, dell'antimonio, dello stagno e del rame a — 100° circa, e quasi contemporaneamente il Wroblewscki (1) misurò quella del rame elettrolitico alla temperatura dell'azoto e dell'ossigeno liquidi.

Finalmente Dewar e Fleming (2) hanno eseguito una serie di investigazioni su un certo numero di metalli puri, leghe e corpi non metallici a sei o sette temperature comprese nell'intervallo fra + 100° e — 197°. Essi ottennero queste basse temperature evaporando ossigeno liquido sotto pressioni ridotte di venticinque o trenta millimetri di mercurio.

§ 4. I resultati però dei varî sperimentatori, sia per condizioni diverse d'esperienze, sia perchè i loro varî studi sono stati fatti su campioni differenti, sono talora molto discordi, per modo che le curve rappresentanti le resistenze elettriche specifiche dei metalli, tracciate ad alte ed a basse temperature rispettivamente da sperimentatori diversi, non possono raccordarsi fra loro.

Manca quindi uno studio completo del fenomeno, perchè da nessuno sperimentatore sono state eseguite delle ricerche che si spingano da temperature molto basse a temperature molto alte, facendo determinazioni ad intervalli abbastanza brevi da poter seguire la variazione vera della resistenza.

Lo studio appunto della variazione della resistenza elettrica specifica di alcuni metalli puri e di alcune leghe col variare continuo della temperatura, è scopo del presente lavoro.

Descrizione generale del metodo.

§ 5. Per misurare la resistenza elettrica dei metalli puri e delle leghe da me cimentati, mi sono servito di un eccellente ponte di Wheatstone, col quale potevo raggiungere direttamente, e con molta precisione il millesimo di ohm, e di un galvanometro Magnus di grandissima sensibilità.

I campioni presi in istudio, tirati in fili del diametro di $^1/_2$ mm. circa, e della lunghezza press'a poco di 8^m, venivano avvolti sopra un opportuno sostegno isolante, che portava anche l'apparecchio destinato a produrre il riscaldamento.

La figura n. 1 mostra schematicamente com'è costituito questo sostegno.

AA′ è una canna di vetro del diametro di 5^{mm}, svasata inferiormente in modo da sorreggere il dischetto metallico D su cui è poggiato un altro dischetto D′ di grosso cartone di amianto di un diametro alquanto maggiore del primo.

(1) C. R. 1885.
(2) Loc. cit.

Coassialmente alla canna AA′, ed appoggiata sopra il dischetto d'amianto, vi ha una seconda canna di vetro B di due centimetri e mezzo di diametro su cui è avvolta una fitta spirale di filo di ferro sottile le cui spire sono isolate fra loro per mezzo di un filo d'amianto.

Questa spirale percorsa da una corrente elettrica la cui intensità viene opportunamente regolata con un reostato, costituisce l'apparecchio riscaldatore.

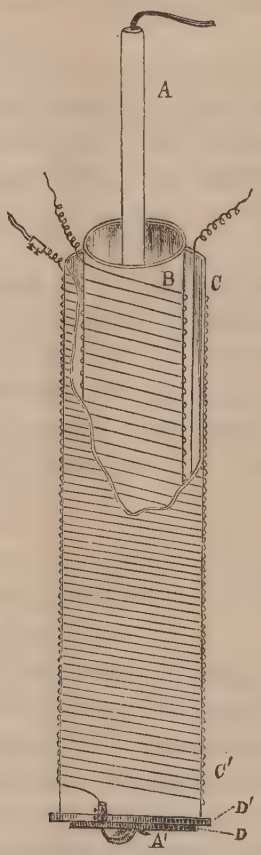


Fig. 1.

Finalmente sulla canna di vetro CC′ lunga 17 cm. e del diametro di 3.^{cm} 5, ricoperta con un massiccio cartone d'amianto di qualità eccellente, è avvolto accuratamente a spirale il filo in esame.

Due spire consecutive qualunque sono poi impedite di venirsi a toccare in qualche punto da un filo di amianto interposto fra esse.

La canna di vetro AA′ (come si vede in sezione nella figura 2) passa attraverso ad un tappo di sughero TT che serve a chiudere la bocca di un vaso di Dewar D_1 D_1 entro il quale viene immerso il sostegno col filo in

istudio. Questo recipiente di Dewar costruito in vetro di Jena ha forma cilindrica ed è profondo 22 cm. ed ha 5 cm. di diametro.

Il tappo TT, foggiato come si vede nella fig. 2, era tanto nella sua faccia inferiore, quanto lateralmente, dove veniva in contatto colle pareti di vetro del recipiente di Dewar, guarnito con del cartone abbastanza massiccio di amianto.

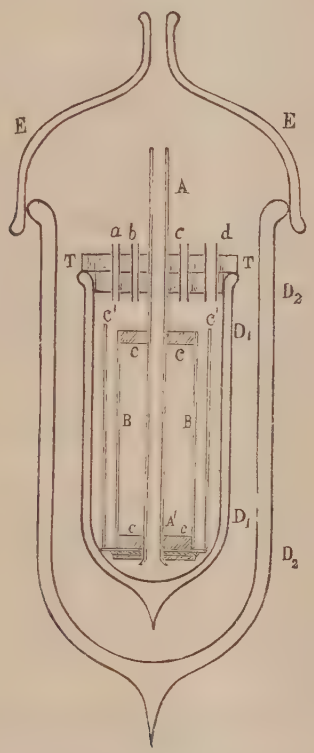


Fig. 2.

Oltre poi ad essere attraversato dalla canna di vetro AA′ il tappo era attraversato da altri 3 tubicini di vetro *a*, *b*, *c* e da un tubetto di quarzo *d*. Di questi *a* serviva a tenere isolato uno dei grossi reofori di rame che faceva capo ad uno degli estremi del circuito del filo in istudio, mentre l'altro reoforo passava per entro la canna di vetro AA′.

I due tubetti *b* e *c* erano destinati ad isolare i due reofori della spirale di riscaldamento; il tubicino di quarzo *d* teneva isolate le due coppie termoelettriche di cui mi sono servito per misurare la temperatura alla quale facevo le mie determinazioni.

Il tutto poi veniva immerso in un secondo vaso di Dewar $D_2 D_2$, di vetro ordinario, esso pure a forma cilindrica e pareti argentate, profondo 35 cm. e di 10 cm. di diametro. La bocca di questo secondo Dewar veniva chiusa da un apposito coperchio EE di vetro a doppia parete e portante superiormente, come mostra la fig. 2, un'apertura attraverso la quale potevo far passare tutti i fili che mi occorrevano per il mio dispositivo. In questo modo ho raggiunto perfettamente il mio scopo che era quello di mantenere per un tempo sufficientemente lungo tutta quanta la massa del filo bene isolata elettricamente e ad una stessa temperatura.

Infatti con un po' di pratica sono giunto a regolare l'intensità della corrente, che doveva circolare nel filo dell'apparecchio riscaldatore, in modo da avere una variazione di temperatura lentissima non solo, ma anche una distribuzione uniforme per tutto il recipiente di Dewar. Dalla tavola infatti che si trova riportata nel seguito del presente lavoro, possiamo facilmente vedere come ciò appunto sia stato molto bene ottenuto.

Infatti finchè la differenza fra temperatura ambiente e quella dell'interno del recipiente non superava gli 80° o 90° non si apprezzava differenza alcuna fra la parte superiore e quella inferiore del Dewar stesso. Nel caso più sfavorevole poi, e cioè quando fra l'interno e l'ambiente avevo il massimo dislivello termico, la differenza fra la parte più alta e quella più bassa del recipiente non superava mai 1°.

Le due coppie termo-elettriche erano formate con fili di rame e constantana del diamettro di due decimi di millimetro, ed erano chiuse in circuito con un galvanometro di Thomson nel quale producevano una deviazione di una divisione della scala per ogni quinto di grado. Come temperatura del filo in istudio ad un determinato istante ho assunto la media delle temperature lette ai suoi estremi.

Ho inoltre curato e verificato anche direttamente coll'esperienza, che fra il campione in istudio ed i due reofori che servivano a congiungerlo coi morsetti del Ponte, non si producessero delle correnti termo-elettriche che avrebbero disturbato le mie determinazioni.

La lunghezza dei campioni presi in esame l'ho determinata quando i fili stessi erano tesi sotto uno sforzo costante di 1 Kg. Il diametro l'ho determinato direttamente per mezzo di una vite di Palmer facendo delle misure in moltissimi tratti, per accertarmi anche che i fili stessi fossero ben uniformi per tutta la loro lunghezza, e l'ho poi ritrovato anche in funzione del peso specifico e della lunghezza.

La fig. n. 3 dà una rappresentazione schematica della disposizione completa per le misure. G è il galvanometro a cui facevano capo le due coppie termo-elettriche che avevano una delle due saldature rispettivamente in una provetta di mercurio immersa in un bagno B di ghiaccio fondente; T è un permutatore che mi permetteva di chiudere sul galvanometro G la prima o

la seconda coppia termo-elettrica; G′ è il galvanometro per la misura delle resistenze.

§ 6. *Andamento delle esperienze.* — I metalli puri da me studiati sono: 1) *l'alluminio*; 2) *l'argento*; 3) *il ferro*; 4) *il magnesio*; 5) *il nikel*; 6) *l'oro*; 7) *il piombo*; 8) *il platino*; 9) *il rame*. Per ciascun campione di filo ho cominciato a misurarne la resistenza nell'aria alla temperatura ambiente; indi disposto entro il Dewar, nel modo già indicato, il sostegno su cui era

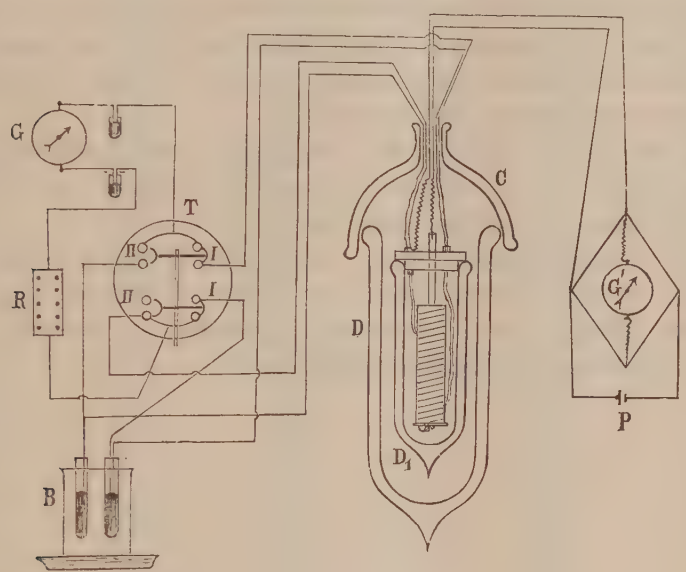


Fig. 3.

avvolto, per mezzo dell'apparecchio riscaldatore l'ho lentissimamente riscaldato fino a 400° facendo una determinazione di 25° in 25°.

Giunto a 400°, regolando opportunamente l'intensità della corrente nel circuito di ferro, ho fatto in modo che il filo in istudio si raffreddasse con molta lentezza fino a ritornare alla temperatura ordinaria, facendo anche in questo caso le misure di resistenza ogni 25 gradi. Così per le basse temperature ho operato tanto quando il sistema lentamente si raffreddava come quando tornava nuovamente a scaldarsi, facendo le determinazioni negli stessi intervalli di temperatura.

Risultati.

In questa prima Nota do soltanto la relazione delle esperienze fatte per l'argento; i resultati relativi agli altri otto metalli saranno riferiti in una prossima Nota.

Dovendo togliere dalla resistenza letta sul Ponte quella dei conduttori che stabiliscono le comunicazioni fra questo ed il filo in istudio, ho calcolato, lettura per lettura, la resistenza di questi reofori tenendo conto che una parte di essi si trovava alla temperatura ambiente, ed una parte molto approssimatamente alla temperatura che era a quell'istante entro il recipiente di Dewar.

Nella 4ª colonna della tavola seguente sono riportati i valori in unità elettromagnetiche assolute della formula $R \frac{s_0}{l_0} 10^9$ alle varie temperature del campione d'argento, senza aver tenuto conto della variazione delle dimensioni del filo. Nella 5ª colonna della stessa tavola sono riportati invece i valori delle resistenze specifiche vere, ottenute calcolando per ogni temperatura le dimensioni corrispondenti del filo stesso.

Per fare queste riduzioni mi sono valso di coefficienti di dilatazione determinati da H. D. Ayres (1) per le basse temperature (+ 40 — 187) e di quelli di Fizeau e di Le Chatelier (2) per le alte.

D'altra parte indicando con l_0 e s_0, la lunghezza e la sezione del filo misurato a 0°, con R la resistenza in ohm, con α il coefficiente di dilazione lineare del metallo di cui è costituito il filo stesso, la resistenza elettrica specifica σ_t ad una determinata temperatura è

$$\sigma_t = 10^9 \, R \frac{s_0}{l_0}$$

oppure

$$\sigma_t = 10^9 \, R \frac{s_0}{l_0} (1 + \alpha t)$$

a seconda che si trascurano o no le variazioni delle dimensioni del filo.

Quindi per ottenere i valori della 5ª colonna della seguente tavola, che rappresentano la resistenza specifica alle varie temperature, basta moltiplicare i valori corrispondenti della 4ª colonna per il binomio di dilatazione.

Il filo d'argento aveva la lunghezza di cm. 580,1 ed il diametro di cm. 0,46.

(1) Physical Review, 1905, pag. 38.
(2) Tabelle del Landolt.

Argento *di Kalhbaum*

Lunghezza a 0° cm.: 850,1. Diametro cm: 0,046.

Temp. letta colla I coppia	Temp. letta colla II coppia	Media delle temp.	Resistenza in Ohm	$R\frac{s_0}{l_0}10^9$	Resistenza specifica vera
12.0°	12,0°	12,00°	0,806	1575	1576
25,0	25,0	25,00	0,845	1653	1654
49,8	49,8	49,80	0,919	1797	1798
74,7	74,7	74,70	0,994	1943	1945
101,0	101,0	101,00	1,074	2100	2104
125.0	125,1	125,05	1,147	2242	2247
150,4	150,5	150,45	1,222	2389	2395
174.8	175,0	174.90	1,294	2530	2538
199,9	200,1	200,00	1,369	2677	2687
225,2	225,4	225,30	1,443	2821	2833
250,8	251,1	250,95	1,515	2962	2976
274,2	274,6	274,40	1,585	3098	3114
300,0	300,4	300,20	1,657	3240	3259
325,7	326,1	325,90	1,729	3381	3402
351.2	351,7	351,45	1,794	3508	3531
375,4	376,1	375,57	1,863	3642	3668
400,2	401,0	400,60	1,929	3771	3800
400,0	400,8	400,40	1,929	3771	—
374,8	375,4	375,10	1,861	3642	—
327.1	327,7	327,40	1,734	3390	—
300,8	301,2	301,00	1,661	3248	—
275,3	275,7	275,50	1,586	3100	—
250,0	250,5	250,25	1,514	2960	—
225,7	226,1	225,90	1,448	2831	—
200,2	200,4	200,30	1,370	2678	—
173,2	173,3	173,25	1,286	2515	—
150,0	150,1	150,05	1,220	2385	—
124,9	125,0	124,95	1,147	2242	—
100,1	100,1	100,10	1,071	2094	—
75,0	75,0	75,00	0,996	1947	—
50,2	50,2	50,20	0,923	1804	—
25,7	25,7	26,70	0,846	1655	—
+ 11,0	+ 11,0	+ 11,00	0,802	1569	1569
+ 0,2	+ 0,2	+ 0,20	0,771	1507	1507
— 25,1	— 25,1	— 25,10	0,691	1351	1350
— 49,9	— 49,9	— 49,90	0,624	1221	1220
— 75,7	— 75,6	— 75,65	0,550	1075	1073
— 100,2	— 100,1	— 100,15	0,468	915	913
— 124,8	— 124,6	— 124,70	0,393	768	766
— 151,3	— 151,0	— 151,15	0,327	641	639
— 175,0	— 174,6	— 174,80	0,254	497	495
— 189,0	— 189,0	— 189,00	0,214	419	417
— 188,8	— 188,8	— 188,80	0,216	422	—
— 175,2	— 174.8	— 175,00	0,255	498	—
— 150,0	— 149,7	— 149,85	0,326	639	—
— 122,7	— 122,5	— 122,60	0,397	777	—
— 100,0	— 100,0	— 100,00	0,469	917	—
— 76,2	— 76,2	— 76,20	0,543	1061	—
— 50,6	— 50,6	— 50,60	0.619	1211	—
— 25,1	— 25,1	— 25,10	0,689	1342	—

Come si vede dunque la differenza fra la resistenza elettrica specifica del nostro campione d'argento ed il valore approssimato $R \frac{s_0}{l_0} . 10^9$ è molto piccola, poichè nel caso più sfavorevole, e cioè alla temperatura di 400° è sempre minore dell'uno per cento.

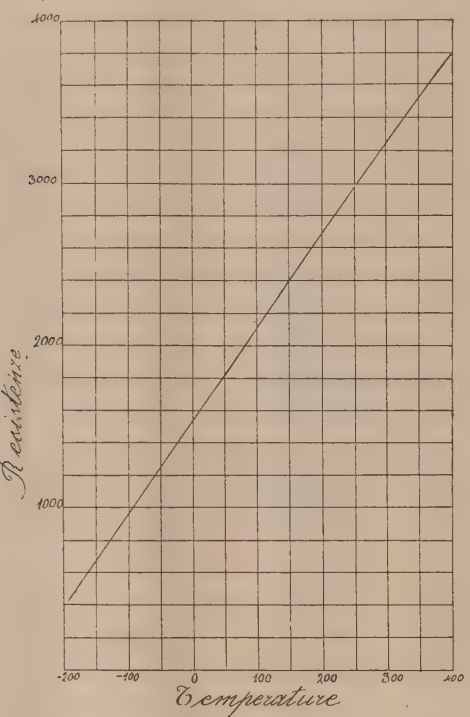


Fig. 4.

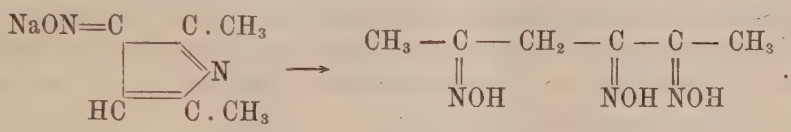
Quindi come prima approssimazione in tali ricerche possiamo addirittura trascurare le variazioni delle dimensioni del filo.

Ed io appunto per tutti gli altri metalli, di cui darò relazione in una prossima Nota, non ne ho affatto tenuto conto.

La figura n. 4 riproduce la curva rappresentatrice la variazione della resistenza elettrica specifica dell'argento in funzione della temperatura.

Chimica. — *Sulla trasformazione dei pirroli in derivati del pirazolo* (1). Nota del dott. V. Castellana, presentata dal Socio E. Paternò.

In una Nota preliminare l'anno scorso (2) descrissi brevemente il comportamento singolare del benzolazo-$\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo rispetto all'idrossilammina. Nell'azione di questo reattivo, per le analogie già conosciute, dovevano attendersi prodotti derivanti dall'idrolisi dell'anello pirrolico (diossime o triossime), come ad esempio nel caso in cui si fa reagire l'idrossilammina sopra alcuni nitrosopirroli (3)



Invece nel caso del cosidetto azodimetilpirrolo avviene una reazione a prima vista del tutto diversa, perchè da essa non prende origine nè una diossima nè una triossima. Infatti io ebbi con tutta facilità e con buon rendimento un prodotto della composizione $C_{12}H_{13}ON_3$, il quale non è altro che una *monossima*, dappoichè fornì un *monobenzoilderivato* e diede per ebollizione con acido solforico diluito, accanto ad idrossilammina, un *chetone* $C_{12}H_{12}ON_2$ che pel suo comportamento considerai intanto come un derivato del pirazolo.

Nella presente Nota riferisco sui dettagli di questo lavoro e sulle ulteriori esperienze che mi hanno condotto a stabilire in modo sicuro la costituzione dei prodotti già prima ottenuti, nonchè a chiarire l'andamento di questa singolare reazione.

E bene intanto ricordare le ragioni per cui il composto $C_{12}H_{12}ON_2$ fu da me diagnosticato come un chetone derivante dal nucleo del pirazolo. Ottenutosi dalla monossima $C_{12}H_{12}N_2{:}NOH$ per eliminazione d'idrossilammina mediante ebollizione con acidi diluiti, esso può di nuovo essere trasformato in questa ossima per l'azione diretta d'idrossilammina in soluzione alcalina. Vi si riscontra come catena non facente parte di nucleo, un gruppo

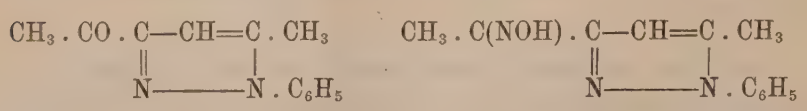
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Palermo (prof. A. Peratoner).

(2) Gazz. Ch. It. 36, (2), 1906.

(3) Angeli, Angelico e Calvello, Gazz. Ch. It. 33, II, 270, 1903.

acetilico, dappoichè dà nella reazione di Lieben con jodio e alcali del jodoformio. Presenta infine la nota reazione di Knorr pei pirazoli dando in modo evidente la colorazione rossa, poi azzurra. previa riduzione con sodio, quando viene ossidato dal bicromato in soluzione acida.

Le formule proposte per questo chetone e per la sua ossima:



darebbero ragione del comportamento di queste sostanze; epperò le reazioni accennate non essendo sufficienti per stabilirne la struttura, ed in particolare anche la presenza del metile come seconda catena laterale, ne ho continuato lo studio nell'intento di giungere ad altri prodotti già noti, la cui costituzione potesse chiarire quella del chetone suddetto.

Il problema venne risolto in vario modo, esaminandosi da un canto i prodotti di ossidazione che il chetone fornisce, e dall'altro il suo comportamento di fronte al nitrito alcoolico.

Per azione del permanganato potassico in presenza d'alcali, variando le condizioni dell'esperienza, nel chetone avviene o l'ossidazione incompleta, cioè del solo acetile o l'ossidazione completa dell'acetile e di un metile, ottenendosi in tal modo rispettivamente un acido monocarbonico od un bicarboacido:

Il primo corrisponde all'*1-fenil-3-carbossil-5-metilpirazolo* ottenuto da Claisen e Roosen (1) tanto dall'etere aceton-ossalico e fenilidrazina, quanto per condensazione dell'etere acetonil-acetico con cloruro di diazobenzolo.

Il secondo è l'*1-fenil-3.5-dicarbossilpirazolo* che Balbiano preparò dall'1-fenil-3.5-dimetilpirazolo (2).

Sulle identità degli acidi da me ottenuti e quelli preparati dagli accennati autori, non può rimanere alcun dubbio data la coincidenza perfetta di tutte le proprietà: aspetto, punto di fusione, solubilità, comportamento coi reattivi, aspetto dei varî sali. E ciò viene confortato ancora dal confronto dell'etere metilico del dicarboacido, preparato dal mio prodotto a tale scopo, con quello già descritto dal Claisen e Roosen (3).

Le esperienze poi che eseguii col nitrito di amile sul chetone e che in ordine cronologico precedettero quelle ora esposte, confermano l'esistenza

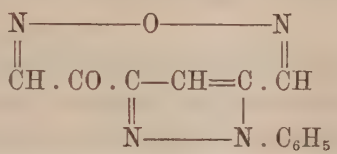
(1) Berichte 24, 1889.
(2) Berichte 23, 1449.
(3) Ann. 278, (287).

oltre che del gruppo acetilico anche di quello metilico come catene laterali nella formula da me ammessa.

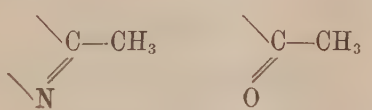
Infatti se si fa agire sul chetone, in presenza di etilato sodico, una quantità equimolecolare di nitrito di amile, si ottiene un mono-isonitroso-composto, col gruppo ossimmidico all'acetile; e ciò è dimostrato dal fatto che con idrato potassico e jodio non dà più jodoformio come fa il chetone primitivo.

Se però si fanno agire due molecole di nitrito sopra una di chetone, si perviene ad una sostanza che corrisponde ad un di-isonitrosoderivato meno una molecola d'acqua. Questa sostanza è quindi molto probabilmente l'anidride di un di-isonitrosocomposto; e come tale infatti è facilmente disciolta dagli idrati alcalini, e riprecipitata già dall'acido carbonico.

Ritengo che il secondo dei gruppi isonitrosi si trovi legato all'atomo di carbonio del metile e che la formola dell'anidride cennata possa essere espressa dallo schema:

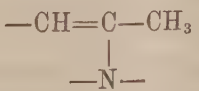


che però dò con tutta riserva, essendo sempre singolare che un metile (catena laterale) reagisca con l'acido nitroso. Del resto non sarebbe questo il primo caso in cui si verifica simile reazione, dappoichè è noto dalle esperienze di Plancher [1] che essa avviene anche per alcuni derivati dell'indolenina, sostituiti con metile in α; ed anzi sotto questo punto di vista venne fatto dal cennato autore [2] un parallelo fra i due aggruppamenti:



che esistono nei chetoni e nell'indolenina da lui studiata; nei quali riscontrasi il metile legato ad atomo di carbonio impegnato per doppia valenza.

Quantunque non identica, non sarebbe quindi del tutto inverosimile la reazione dell'acido nitroso col mio derivato metilico, nel quale l'atomo di carbonio che porta il metile soddisferebbe a due diverse condizioni, di essere cioè impegnato da un lato per doppia valenza e dall'altro unito direttamente all'azoto



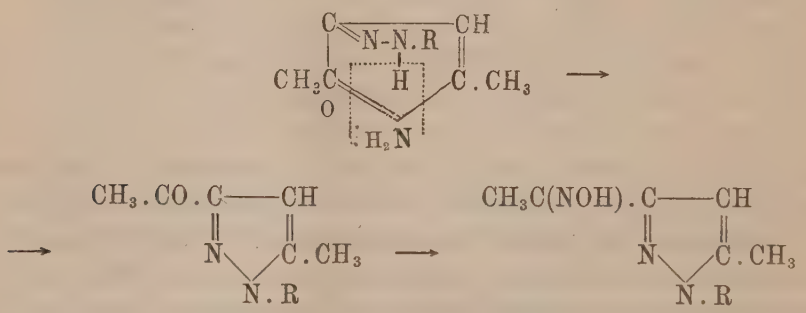
(1) Gazz. Ch. It. 1898 (2), 406.
(2) Gazz. Ch. It. 1892 (2), 418.

potendosi perciò il derivato pirazolico considerare come un derivato del pirrolo, il quale ultimo gruppo è anche nucleo fondamentale nelle indolenine.

Non saprei d'altronde trovare altra spiegazione per la formazione del di-isonitrosocomposto, sembrandomi poco attendibile la supposizione che l'azione dell'acido nitroso debba interpretarsi come una addizione agli atomi di carbonio del nucleo, uniti per doppio legame. Esperienze apposite mi hanno infatti dimostrato che derivati pirazolici, non contenenti il metile nella posizione indicata, come ad esempio l'etere dimetilico dell'acido fenilpirazoldicarbonico, rimangono inalterati in presenza di nitrito di amile ed etilato sodico dal quale ultimo l'etere viene semplicemente saponificato.

Ma anche astraendo da questa serie di esperienze, ed attenendomi ai soli risultati avuti nella ossidazione, non può rimanere dubbio alcuno sulla costituzione del chetone $C_{12}H_{12}ON_2$ e della sua ossima, il prodotto primo che ebbi nell'azione dell'idrossilammina sopra l'azodimetilpirrolo; e può trovarsi quindi una adeguata spiegazione della nuova sintesi di un derivato pirazolico.

È evidente che in essa l'azoto pirrolico viene eliminato sotto forma di ammoniaca, la cui presenza può accertarsi durante la reazione, e ciò non può avvenire se non previa idrolisi del nucleo pirrolico come risulta dalle ricerche di Ciamician [1] e di Angeli ed Angelico [2]. Un atomo di carbonio contiguo a quello di azoto nel nucleo pirrolico conseguentemente diverrebbe chetonico fornendo l'ossima, mentre il secondo atomo di carbonio del nucleo in posizione α, si legherebbe all'atomo di azoto unito al fenile; quest'ultimo atomo poi concorrerebbe, secondo questo modo di vedere, col suo idrogeno immidico alla formazione dell'ammoniaca.



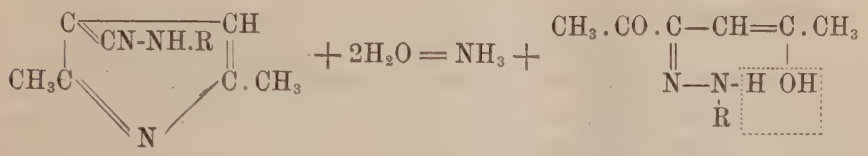
(dove R indica il fenile).

Con questa interpretazione non si ammetterebbe che una parziale idrolisi del nucleo pirrolico. Qualora poi si voglia supporre che questa idrolisi avvenga completa per l'azione di due molecole d'acqua, il prodotto intermedio avrebbe una così grande analogia con i composti dichetonici che servirono

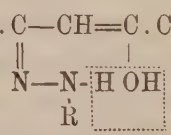
(1) Gazz. Ch. It., vol. XX, 1890, pag. 546 e seg.
(2) » » » loc. cit.

a varî autori, fra cui a Claisen e Roosen, per la preparazione di derivati pirazolici, che la formazione di un simile derivato, anche nel caso mio, sarebbe da considerarsi come una necessaria conseguenza.

Infatti mentre per idrolisi totale del benzolazodimetilpirrolo si giunge al seguente idrazone di un dichetone:



l'idrazone preparato da Claisen e Roosen



per arrivare al carboacido del metilfenilpirazolo, ne differisce solamente per la natura di una catena laterale.

La reazione presente adunque, nonostante che conduca a prodotti finali inattesi, pure non è dissimile in fondo da quella che avviene con gli isonitrosopirroli, essendo la prima azione dell'idrossilammina quella idrolizzante il nucleo pirrolico. Solamente essendo data la possibilità della formazione del nucleo pirazolico, stabile, per la presenza del gruppo fenilidrazonico, avviene di preferenza questa, anzichè la formazione di diossime, (triossime) o idrazossime.

Credo superfluo notare che la reazione da me studiata rappresenta la prima trasformazione diretta di un pirrolo in un pirazolo.

Esperienze.

Ossima dell'1-fenil-3-acetil-5-metilpirazolo $C_{12}H_{13}ON_3$.

Descrivo nuovamente la preparazione dell'ossima, ma con più minuti particolari che nella citata Nota preliminare, avendo in questa appena accennato alla sua formazione.

Alla soluzione alcoolica del monoazo-$\alpha\alpha'$-dimetilpirrolo, preparato seguendo le indicazioni di O. Fischer ed Hepp [1] si aggiungono 6 gr. di cloridrato di idrossilammina ed 8 gr. di soda caustica, e si pone a ricadere. Passati pochi minuti comincia una viva reazione e forte sviluppo di ammoniaca, mentre il colorito rosso bruno della soluzione va diventando sempre più chiaro.

Dopo tre ore di ebollizione si distilla l'alcool, si riprende il residuo con poca acqua e, se occorre, si filtra. Per aggiunta di acido acetico diluito,

[1] Berichte *19*, 2251.

sino a debole reazione acida, si separa in fiocchi una bella sostanza giallo chiara, che cristallizza dal benzolo in minuti aghi, i quali fondono a 175°.

Gr. 0,1930 di sostanza diedero gr. 0,4726 di CO_2 e gr. 0,1140 di H_2O;
» 0,1824 fornirono cmc. 31 di azoto a 750 mm. ed a 22°;
» 0,1924 dettero cmc. 32,7 di azoto a 747 mm. ed a 21°.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{13}ON_3$
C	66,78	66,97
H	6,56	6,05
N	19,40 , 19,41	19,53.

Si scioglie in alcool, etere, benzolo ed è un po' solubile nell'aqua fredda. Lasciata all'aria arrossa ed a lungo andare si altera. Bollita con acido solforico al 25 % elimina idrossilammina e dà un chetone solido, mentre per azione del cloruro di benzoile fornisce un monobenzoilderivato.

Benzoilderivato dell'ossima $C_{19}H_{17}O_2N_3$.

Fu ottenuto adoperando il metodo di Baumann e Schotten. Al prodotto sciolto in soda caustica, mantenuta fredda, si aggiunge goccia a goccia del cloruro di benzoile sino a persistenza del suo odore.

Si separa in tal modo una sostanza giallognola che, lavata con soda diluita e poi con acqua, quando è secca, cristallizza dal benzolo in minuti aghi quasi bianchi fondenti a 156°.

All'analisi si ebbero numeri concordanti colla formula $C_{19}H_{17}O_2N_3$ corrispondente ad un derivato monobenzoilico.

Gr. 0,3162 di sostanza diedero cmc. 36,5 di azoto a 749 mm. ed a 22°,

	Trovato	Calcolato per $C_{19}H_{17}O_2N_3$
N %	13,16	13,16

Chetone 1-fenil-3-acetil-5-metilpirazolo $C_{12}H_{12}ON_2$.

Gr. 5 di ossima vennero sospesi in 100 cmc. di acido solforico al 25 % e mantenuti per circa mezz'ora alla temperatura di ebollizione in un palloncino munito di refrigerante ascendente. Durante i primi minuti di ebollizione sornuota alla superficie del liquido un olio bruno che presto passa in soluzione, se si ha cura di agitare continuamente il palloncino in cui si opera. Dopo aver diluito con poca acqua, per raffreddamento si separa una sostanza bruna che, cristallizzata dalla ligroina in presenza di carbone animale, si presenta sotto forma di grosse tavole quasi bianche, splendenti, lunghe parecchi centimetri e che fondono a 90°.

Gr. 0,1994 di sostanza fornirono cmc. 24,5 di azoto a 749 mm. ed a 22°.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{12}ON_2$
N %	14,01	14,00

Insolubile negli alcali, è un po' solubile negli acidi. Si scioglie bene in etere, alcool e benzolo, poco in etere petrolico, discretamente nella ligroina. Per azione di idrossilammina ridà l'ossima primitiva e sciolto in alcool metilico esente di acetone dà con jodio ed idrato potassico jodoformio. Fornisce la reazione di Knorr pei pirazoli.

Monocarbo-acido 1-fenil-3-carbossil-5-metilpirazolo $C_{11}H_{10}O_2N_2$.

Si ottiene questa sostanza aggiungendo al chetone sospeso in acqua, resa alcalina con qualche goccia di potassa caustica, a poco a poco ed agitando, della soluzione satura a freddo di permanganato potassico sino a che persiste la colorazione violetta per qualche minuto anche alla temperatura del bagno-maria. La reazione avviene già a freddo, in ultimo per altro conviene facilitarla riscaldando come fu detto.

Si scolora allora l'eccesso di permanganato con solfito sodico, si filtra, ed acidificando il filtrato con acido cloridrico diluito, si ottiene un precipitato gommoso che, strofinato con bacchetta di vetro, diventa subito cristallino.

Cristallizzato una sola volta dall'acqua è puro, e si presenta sotto forma di aghi bianchi fondenti a 106°.

Posto per una notte nel vuoto su acido solforico perde acqua di cristallizzazione, diventa opaco e fonde invece a 136° analogamente all'acido 1-fenil-5-metilpirazolo-3-carbonico preparato da Claisen, col quale è identico in tutte le proprietà.

Gr. 0,2191 di sostanza fornirono gr. 0,5225 di CO_2 e gr. 0,1000 di H_2O;
» 0,2030 dettero cmc. 22,9 di azoto a 771 mm. ed a 13°.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{10}O_2N_2$
G	65,04	65,14
H	5,07	4,95
N	13,65	13,86

Bicarboacido 1-fenil-3-5-dicarbossilpirazolo $C_{11}H_8O_4N_2$.

A 5 gr. di chetone sospeso in 5 cmc. di potassa caustica di densità 1,30, si aggiunge a poco per volta la soluzione calda di gr. 18,42 di permanganato in 150 cmc. di acqua, avendo cura di agitare continuamente nel mentre si scalda a bagno-maria.

Dopo un'ora, persistendo la colorazione violetta, si scolora l'eccesso di permanganato con solfito e si filtra. Si svapora il filtrato a bagno-maria e si acidifica con acido solforico diluito, ottenendosi così un precipitato bianco che cristallizzato dall'acido acetico glaciale si depone sotto forma di splendidi aghi fondenti a 256°.

Esso in tutte le sue proprietà si dimostrò identico all'acido 1-fenilpirazol-3-5-dicarbonico che Balbiano ottenne dall'1-fenil-3-5-dimetilpirazolo.

Gr. 0,1915 di sostanza diedero cmc. 20,5 di azoto a 764 mm. ed a 25°.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_8O_4N_2$
N %	12,01	12,07

Etere dimetilico del bicarboacido $C_{13}H_{12}O_4N_2$.

Per caratterizzare ancor meglio quest'acido e per analizzare anche un suo derivato, essendo i suoi sali tutti gommosi, ne ho preparato l'etere metilico, già descritto da Claisen (Annalen 278 (287)), facendo agire una corrente gassosa di acido cloridrico secco sulla soluzione calda dell'acido in alcool metilico anidro.

Fonde a 127-128° come quello di Claisen ed analizzato diede i numeri richiesti dalla teoria.

Gr. 0,2187 fornirono cmc. 20,5 di azoto a 754 mm. ed a 15°.

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{12}O_4N_2$
N %	10,84	10,77

Monoisonitrosocomposto del chetone $C_{12}H_{11}O_2N_3$.

Alla soluzione alcoolica di gr. 0,23 di sodio si aggiungono gr. 2 di chetone e poi raffreddando ed agitando, a goccie, gr. 1,17 di nitrito di amile. Si chiude con tappo la bevutina in cui si opera e si lascia in riposo per una notte in luogo fresco.

Il liquido appena giallognolo comincia dopo qualche tempo a passare al rosso ed in ultimo diventa rosso bruno. All'indomani si versa in acqua resa alcalina con una goccia di soda caustica, si estrae con etere per eliminare traccie di chetone che non abbia reagito e si precipita con acido acetico diluito.

Si ottiene in tal modo una sostanza giallognola che cristallizza dal benzolo in piccoli aghi duri, quasi bianchi fondenti a 172°.

Gr. 0,1100 di sostanza diedero cmc. 17,8 a 763 mm. ed a 26°.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{11}O_2N_3$
N %	18,04	18,34

Di-isonitrosocomposto del chetone $C_{12}H_8O_2N_4$.

Gr. 0,46 di sodio vennero sciolti in alcool assoluto ed aggiunti di gr. 2 di chetone; indi sul liquido limpido, raffreddando con acqua, si fecero gocciolare gr. 2,34 di nitrito di amile e si lasciò in riposo per una notte la bevutina chiusa.

Il colore giallognolo del liquido in questo caso passò al rosso chiaro, e versatolo in acqua, dopo estrazione con etere, per aggiunta di acido acetico diluito si separarono dei fiocchi quasi bianchi che cristallizzarono dal benzolo in aghi minuti e leggeri dal punto di fusione 175°.

Gr. 0,1342 di sostanza dopo riscaldamento per due ore a 100°, fornirono all'analisi cmc. 28,7 di azoto a 761 mm. ed a 28°.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_8O_2N_4$
N %	23,51	23,33

Si scioglie negli alcali e viene riprecipitato dall'acido carbonico.

Chimica. — *Sugli idrati del fluoruro di alluminio* (1). Nota di Arrigo Mazzucchelli, presentata dal Socio E. Paternò.

Il fluoruro di alluminio, sebbene sia già stato molte volte soggetto di studio, sia per sè stesso, sia come materia prima per la preparazione dei fluoalluminati, presenta ancora nella sua storia chimica numerosi punti oscuri, che mi è sembrato conveniente di chiarire, anche a causa delle interessanti particolarità che questo composto presenta.

Riassumo qui, brevemente, e nei punti più essenziali, quanto se ne conosce in proposito, riservando un esame esauriente della bibliografia alla Memoria completa che uscirà nella Gazzetta Chimica.

Il fluoruro di alluminio, che allo stato anidro (quale può prepararsi artificialmente secondo vari metodi, dovuti per lo più al S.t Claire Deville) è una delle sostanze più insolubili e refrattarie agli agenti chimici, è suscettibile anche di presentarsi in forma di idrati solubili, sulle cui proprietà peraltro i vari autori che se ne sono occupati sono ben lungi dall'essere di accordo.

Il Berzelius ad es. (2), afferma che le soluzioni di fluoruro di alluminio possono evaporarsi sino a consistenza sciropposa. e danno poi una massa gommosa, lentamente solubile nell'acqua fredda, rapidamente nella calda.

H. S.t Claire Deville (3) ne ottenne invece una polvere cristallina, facilmente sfioribile, della formula $Al_2Fl_6, 7H_2O$, oltre a due sali acidi $Al_2Fl_6, HFl, 5H_2O$ e $3AlFl_3, 2HFl, 5H_2O$, preparabili per evaporazione spontanea o precipitazione con alcool in presenza di HFl. Recentemente il Baud (4) ha ottenuto per evaporazione delle soluzioni, a caldo o su P_2O_5, un idrato $Al_2Fl_6, 7H_2O$, solo parzialmente solubile nell'acqua, mentre per precipitazione con alcool forte ha ottenuto un idrato della stessa composizione, ma solubile. Egli ne ha studiato pure la disidratazione graduale per azione del calore, che è accompagnata da una progrediente insolubilità nell'acqua e nell'acido fluoridrico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma.
(2) Poggendorff's Annalen, *1*, 23; e Lehrbuch der Chemie.
(3) Ann. de chim. et phys. (3), *61*, 1861, (321-331).
(4) Comptes rendus *135*, 1903, (1103-1106).

Altre asserzioni isolate si trovano qua e là, nei trattati più importanti di chimica inorganica. L'Ostwald ad es. (1) afferma che il fluoruro di alluminio finisce in ogni caso col deporsi completamente allo stato insolubile dalle sue soluzioni, mentre nell'eccellente *Handbuch der anorganischen Chemie* dell'Abegg si dice che le soluzioni di fluoruro di alluminio vanno soggette a una idrolisi assai spinta, fenomeno a cui ha già accennato, in termini generici, il Berzelius, ma che non si trova ulteriormente menzionato in tutte le memorie degli sperimentatori successivi.

Tutto il sin qui esposto mostra chiaramente la necessità di un lavoro di coordinazione e completamento delle nostre cognizioni sul fluoruro di alluminio, e mi ci sono accinto, cominciando anzitutto da quanto si riferisce ai suoi idrati. Ma fin dal principio ho riconosciuto la esistenza di una quantità di complicazioni: fenomeni di metastabilità e di soprasaturazione, lentezza a raggiungere l'equilibrio tra soluzione e fase solida, esistenza di idrati isomeri, identici per composizione, differenti per solubilità e resistenza al calore. E ciò, mentre spiega la possibilità delle contradizioni accertate fra i vari osservatori, e giustifica l'aspettativa di risultati interessanti da uno studio completo, d'altra parte complica talmente la esecuzione pratica delle ricerche, dove, fra altro, occorre dare una parte rilevante al tempo, che ho giudicato conveniente render noti intanto i primi risultati ottenuti, che non sono privi d'importanza e schiariscono già alcuni punti oscuri nella storia del fluoruro di alluminio.

Premetto alcune parole sopra i metodi seguiti nelle presenti indagini.

Un idrato può caratterizzarsi sia mediante la sua composizione, sia mediante la sua solubilità, sia mediante la sua tensione di vapore. La composizione degli idrati del fluoruro di alluminio, dopo riconosciutane la neutralità al metilorange, è stata accertata determinandone la perdita di peso per calcinazione con ossido di piombo; sulla solubilità, che costituisce, certamente, un ottimo criterio, e si presta alle conclusioni più interessanti dal punto di vista energetico, sono già state fatte alcune osservazioni e più se ne faranno in seguito, ma non bisogna dissimularsi che i suoi risultati possono essere falsati da quella tendenza delle soluzioni di fluoruro di alluminio a deporre gradualmeute il loro sale in una forma pressochè insolubile, come già acutamente ebbe a intuire l'Ostwald (2). La determinazione della tensione di vapore, ossia della stabilità relativa dei vari idrati allo stato solido, quale si può riconoscere nel modo più semplice dalla loro per-

(1) *Grundlinien der anorganischen Chemie*, II Aufl., 572.

(2) Probabilmente l'asserzione dell'Ostwald (l. c.) è più basata sulla considerazione del carattere generale di questo composto, che non sopra osservazioni sperimentali, sue o di altri. Infatti la forma poco solubile in cui tutte le altre tendono a trasformarsi, non è, come vorrebbe l'Ostwald, il fluoruro anidro, ma un idrato della formula $Al_2Fl_6 + 6H_2O$, secondo che risulterà dalla presente memoria.

dita di peso in varie condizioni di temperatura e di ambiente, costituisce per la sua rapidità di esecuzione, nella forma più semplice, un sussidio sperimentale non indifferente, sebbene riconosciamo volentieri che non si può attribuirvi un valore assoluto.

La prima questione da porsi è quella della preparazione del fluoruro di alluminio allo stato di soluzione acquosa. Senza negare il valore delle osservazioni del Deville (l. c.) il quale, operando su soluzioni diluite, ha trovato che perfino i silicati naturali (caolino) cedono quantitativamente il loro alluminio sotto l'azione, nonchè di un difetto di acido fluoridrico, ma anche dell'acido fluosilicico stesso, con precipitazione di silice gelatinosa, io ho accertato che, se si vuole ottenerne delle soluzioni abbastanza concentrate e possibilmente esenti di acido fluoridrico libero, perfino l'idrato d'alluminio secco del Kahlbaum è troppo lentamente solubile: il processo della neutralizzazione completa, riconoscibile al metilorange, va in lungo, e finisce col deporsi l'idrato poco solubile di cui parlerò tra poco. Assai conveniente invece è l'uso dell'acetato basico di alluminio secco, che, finamente polverizzato, si scioglie con tutta facilità nell'acido fluoridrico abbastanza concentrato, con forte sviluppo di calore. Si ha così una soluzione fortemente acida per acido acetico, ma dove l'acido fluoridrico e l'allumina sono contenuti in proporzioni pressochè equivalenti e, secondo ogni probabilità, integralmente combinati tra loro (1).

Le proporzioni trovate opportune sono le seguenti: 42 gr. di acetato al 54 % di ossido di alluminio, sospesi in circa 100 cc. di acqua e aggiunti a 66 gr. di acido fluoridrico al 40 % in peso. In queste condizioni si ha immediatamente o dopo breve ebollizione una dissoluzione completa (2).

La necessità di realizzare fin da principio la combinazione quantitativa fra acido fluoridrico e allumina è determinata dal fatto che, se rimane dell'allumina indisciolta, essa non può essere separata per filtrazione. Se infatti si porta sopra un filtro, anche poco fitto, questa soluzione concentrata, si osserva che dopo le prime goccie il passaggio del liquido è straordinariamente rallentato. La carta si ricuopre gradualmente di uno strato gelatinoso dapprima quasi invisibile in seno al liquido, alle cui spese esso va però lentamente aumentando per divenire poi sempre meno trasparente, sino a trasformarsi in massa biancastra, gommosa e tenace, che non aderisce però agli oggetti. Nelle parti superiori del filtro, la carta rimasta scoperta dal liquido indurisce, assumendo un'apparenza translucida, come appunto se fosse

(1) Il fluoruro di alluminio è pochissimo ionizzato, e perciò la ripartizione dell'allumina tra acido acetico e fluoridrico deve essere quasi esclusivamente a favore di quest'ultimo.

(2) Grazie alla liberalità del prof. Paternò, direttore di questo Istituto, le soluzioni di fluoruro di alluminio si poterono sempre preparare e conservare in recipienti di platino.

imbevuta di gomma arabica o di gelatina animale. Questi fenomeni rammentano vivamente le osservazioni del Berzelius quando parla di soluzioni siroppose di fluoruro di alluminio che assumono la consistenza gommosa. Tuttavia l'analogia coi colloidi organici si arresta qui. Se si riprende con acqua la gomma semiessiccata, essa non vi si riscioglie che in parte, e specialmente se già aveva cominciato a divenire opaca; anzi, come abbiamo detto, questa sostanza gelatinosa si separa spontaneamente dalle sue soluzioni al contatto della carta del filtro, anche senza l'intervento della evaporazione. Inoltre se si lascia asciugare interamente la gomma essa si trasforma in una polvere bianca che non aderisce più alla carta, da cui può separarsi con tutta facilità, e che ripresa con acqua non riassume affatto l'aspetto gommoso primitivo. Non si tratta qui del solito fenomeno dell'essiccazione di una sostanza molto solubile e malamente cristallizabile; il fluoruro di alluminio ha subito invece un cangiamento completo nel suo stato, una trasformazione, di carattere irreversibile, in un idrato poco solubile, che rappresenta la forma stabile a temperatura ordinaria, cui tendono in contatto dell'acqua gli altri idrati solubili.

Veramente resta ancora a spiegare il perchè di quello stadio intermedio simile alla gelatina, che non si può in seguito riprodurre; ma per quanto il fenomeno sia interessante e degno di studio, è da notare che esso non costituisce una specialità del fluoruro di alluminio, ma è una proprietà, forse generale, certo molto diffusa, dei fluoruri, che per lo più nel separarsi dalle loro soluzioni assumono dapprima lo stato gelatinoso: così fanno, in modo tipico, molti dei fluosali studiati dal Marignac; si tratta qui di uno stato transitorio, la cui complessità molecolare è forse minore di quella della forma definitiva.

Tornando al nostro fluoruro, la gelatinizzazione graduale che mostrano le sue soluzioni più concentrate al contatto della carta, e che ne rende poco pratica la filtrazione, deve dunque considerarsi come dovuta semplicemente a una azione di contatto dei filamenti di cellulosa, che fan cessare lo stato di soprasaturazione in cui la soluzione si trova rispetto all'idrato più stabile.

La stessa trasformazione che la soluzione subisce al contatto della carta, ha luogo pure, dopo un tempo più o meno lungo, anche lasciando la soluzione a sè. Se si tratta di una soluzione un po' concentrata, il processo ha luogo in pochi giorni, formandosi in fondo e in seno al liquido una sostanza prima gelatinosa e traslucida, poi bianca e più densa, la cui quantità va gradualmente crescendo: la formazione e l'addensamento sono accelerati da una temperatura presso l'ebollizione, alla quale non si nota più lo stadio intermedio di gelatina. Con soluzioni diluite, conservate da qualche mese, si osserva invece la formazione di croste cristalline, poco solubili, il cui studio non ho potuto ancora completare, ma che sembrano constare dello stesso idrato. Mi riservo di riferirne più distesamente altrove.

La composizione di questa sostanza risulta dai dati analitici seguenti. Ne fu determinata l'acqua scaldando al disotto del rosso colla quantità quintupla di ossido di piombo, e l'alluminio scacciando l'acido fluoridrico con acido solforico concentrato e decomponendo per calcinazione prolungata il solfato formatosi, secondo che consiglia il Rose (1). I numeri ottenuti su tre preparati diversi sono i seguenti:

I. Aq. $\%$ = 38,03; 39,30; 37,77; 38,16, media 38,31; Al $\%$ = 20,12; 20,46, media 20,29; Fl $\%$ per differenza 41,40, calcol. 45,08.

II. Aq. $\%$ = 38,76; 39,23; 39,31; 39,44; 39,46, media 39,24; Al $\%$ = = 20,0; Fl $\%$ per diff. 40,76, calcol. 44,44.

III. Aq. $\%$ 38,26; 38,68; 38,92, media 38,63; Al $\%$ = 20,16; 20,27; media 20,21; Fl $\%$ p. diff. 41,16, calcol. 44,90.

Sotto « percentuali calcolate » pel fluoro si intendono quelle dedotte dall'alluminio mediante il fattore 3Fl : Al e basate sull'ammissione che si abbia da fare con un fluoruro neutro ed esente di sale basico. Il fatto che esse sono sempre superiori alle trovate, ed anzi, di un ammontare pressochè uguale per tutti e tre i preparati, mostrerebbe che invece una certa quantità di sale basico c'era, e questo concorderebbe con quanto afferma, nel suo trattato, l'Abegg. Ma nell'apprezzamento di dati numerici occorre tener conto che il metodo di determinazione prescelto per l'alluminio se è, certamente, il più pratico ed il più esatto, va però soggetto a dare valori un pò troppo elevati (come sono, ad es., troppo elevati quelli ottenuti nelle analisi dell'idrato $Al_2Fl_6 + 17H_2O$, che vedremo più oltre, sebbene, là come sempre, non si riguardasse la calcinazione come terminata se non quando si era ottenuto due pesate assolutamente concordanti) e che questo errore in più si accresce ancora nel calcolo indiretto del fluoro. Una parte delle divergenze potrebbe perciò provenire da questo fatto. Tuttavia esse sono troppo rilevanti per potersi attribuire soltanto ad errori sperimentali, e ritengo che esse parlino realmente a favore di una certa idrolisi con formazione di sale basico; solo che il risultato numerico che se ne dedurebbe, e secondo cui circa il 14,2 $\%$ del fluoro sarebbe sostituito dall'ossigeno (come è espresso, per coincidenza casuale, della formula $5\,AlFl_3$, Al_2O_3) sia da considerarsi come un valore limite, assai superiore alla realtà.

Ammessa, comunque, la esistenza della idrolisi, in seguito a cui si formerebbe una certa quantità di $Al(OH)_3$, più ricca in alluminio (34,7 $\%$) e più povera in acqua (34,5 $\%$), mi sembra che dalle analisi si possa dedurre con certezza che il composto definitivo, che si separa allo stato insolubile nelle sopracitate condizioni, è l'idrato $Al_2Fl_6 + 6H_2O$, pel quale si calcola $H_2O\,\%$ = 39,04; Al $\%$ = 19,60.

(1) Analyse quantitative, pag. 757.

Aggiungo, per quanto riguarda i dati analitici di questa sostanza, che essa perde assai difficilmente la sua acqua per azione del calore: un campione, mantenuto per 18 ore a 100°, aveva perso solo 1,9 % del suo peso.

Fin qui ci siamo occupati soltanto di idrati che si depongono, assai lentamente, dalle soluzioni concentrate del fluoruro d'alluminio, ma che, una volta separatisi, non si sciolgono che assai scarsamente nell'acqua; essi debbono dunque la loro origine a una trasformazione irreversibile del sale in questione, che si differenzia nettamente, a questo riguardo, dagli ordinari composti inorganici. Ma nelle mie esperienze ho ottenuto pure un idrato capace di deporsi in bei cristalli perfettamente definiti, che si risciolgono con tutta facilità nelle acque madri o nell'acqua pura, donde possono riottenersi per evaporazione, e la cui solubilità varia notevolmente colla temperatura. Un simile comportamento é cosa affatto normale per la maggior parte dei sali, ma pel fluoruro di alluminio costituisce, invece, una singolarità di cui non si aveva finora esempio nella letteratura.

Se nella preparazione del fluoruro di alluminio da acetato basico, acido fluoridrico e acqua, si usa una quantità di quest'ultima minore di quella indicata poco sopra, e cioè, invece di 42 p. di acetato, 66 di acido fluoridrico, 100 di acqua, solo 75 di quest'ultima, si osserva, come è naturale, un riscaldamento anche più forte del consueto, che può spingersi sino all'ebollizione violenta del liquido, ma, dopo fatto raffreddare quest'ultimo, si osserva che in seno ad esso comincia a deporsi un aggregato di cristalli, che possono raggiungere le dimensioni di qualche millimetro, perfettamente trasparenti, che facilmente si ridisciolgono per un lieve riscaldamento. Liberati il più possibile dalle acque madri per compressione tra carta, poi, quando sono quasi asciutti, pestati in mortaio e compressi di nuovo sino ad essere asciutti interamente, questi cristalli danno con acqua delle soluzioni acide al tornasole, ma neutre al metilorange, come sogliono fare i sali di alluminio stechiometricamente neutri, ciò che mostra che in essi il fluoro e l'alluminio stanno nel rapporto Al : 3Fl (1). La determinazione dell'acqua col solito metodo all'ossido di piombo richiede qualche precauzione per essere applicata a questo idrato assai ricco, facile a sfiorire e che fonde poco sopra della temperatura ordinaria. Nei primi saggi si ottennero perciò numeri oscillanti fra 62,85 e 65,80 %; ma una serie di determinazioni eseguite colla massima cura sopra un campione preparato di fresco ha fornito queste percentuali: 63,70; 64,69; 64,53; 64,42; 64,82, in media 64,43. Per l'alluminio si trovò 11,83 e 11,86 %. Sebbene questi ultimi valori siano un pò troppo elevati, l'insieme dei risultati mostra indubbiamente che all'idrato deve attribuirsi la formula $Al_2Fl_6 + 17H_2O$, per cui si calcola aq % = 64,51, Al % = 11,42.

Per ottenere questo idrato non è però indispensabile partire da soluzioni tanto concentrate come la sopracitata. Se si raffredda sotto 0° una soluzione

(1) Confrontisi il Baud, loc. cit.

anche un po' più diluita, si osserva la formazione abbondante di un feltro di corti aghetti, che scompaiono interamente per un leggero innalzamento di temperatura, e devono perciò essere liberati rapidamente, su carta, dalle loro acque madri. All'analisi danno risultati praticamente identici ai precedenti, e questo modo di preparazione è anzi più comodo del primo, perchè non necessita l'uso di soluzioni tanto concentrate, e perchè i cristalli, essendo piccoli e isolati, si possono meglio asciugare.

Il metodo, come si vede, si basa sul fatto che la solubilità dell'idrato in seno all'acqua madre, fortemente acetica, diminuisce rapidamente colla temperatura. Lo stesso ha luogo per la solubilità in acqua pura. L'idrato preparato di fresco si riscioglie con una certa lentezza a freddo, più presto a caldo, ma completamente e senza residuo. La soluzione, concentrata su acido solforico, resta facilmente soprasatura, ma depone l'idrato per aggiunta di un suo cristallino; operando a 11°, si trovò che il liquido soprastante conteneva in media, ogni 100 gr., 3,85 gr. di $AlFl_3$. La soluzione satura a — 0°,2 contiene invece gr. 1,20 %.

Questo idrato non si mantiene a lungo; esposti all'aria, i suoi cristalli sfioriscono ben presto, ricoprendosi di croste bianche, dopo di che tutto il cristallo finisce col divenire opaco, anche se si ripone poi in tubo chiuso. Ma anche al riparo dall'aria esso subisce col tempo una notevole trasformazione. Se si torna ad esaminare dopo un certo tempo i cristalli stati asciugati fra carta, si trova che essi non sono più integralmente solubili in poca acqua ma lasciano indietro una sostanza bianca, cristallina, poco solubile. Inoltre il loro aspetto è mutato: la polvere che prima era asciutta e scorrevole ora è diventata umidiccia e aderente; se si ricomprime fra carta, e se ne determina il contenuto in acqua, si trova che questo è diminuito; una volta, dopo 30 giorni, si trovò 57,3 %: con un altro preparato dopo 40 giorni solo 47,8 %. Tutto ciò mostra che si va formando un idrato più povero di acqua, che può ottenersi senz'altro se si scaldano leggermente i cristalli così alterati. Si trova allora che alla temperatura di circa 21° essi cangiano bruscamente di aspetto, e fondono parzialmente, con separazione di una sostanza bianca cristallina, pochissimo solubile anche a temperatura elevata. Raffreddando di nuovo la massa semifluida essa non riprende più l'aspetto primitivo, ma la sostanza cristallina già formatasi resta inalterata a canto della sua soluzione satura. Non si tratta dunque di una trasformazione reversibile, sul genere di quella del sale di Glauber (cioè $NaSO_4 + 10\,H_2O = Na_2SO_4$ anidro + soluzione satura) ma di un cangiamento irreversibile, dove l'idrato metastabile e solubile scompare definitivamente. La sostanza cristallina così formata, compressa cautamente fra carta fino ad asciugamento completo (1) ha dato alla deter-

(1) Occorre rinnovare frequentemente la carta assorbente, e aumentare la pressione solo gradualmente, altrimenti le acque madri danno sulla carta il solito deposito gelati-

minazione dell'acqua risultati un po' diversi a seconda dei preparati. Un preparato ottenuto da un idrato $Al_2Fl_6 + 17\,H_2O$ vecchio di un mese conteneva 42,8; 42,6; 42,8 % di acqua; mentre altri due ottenuti da idrati vecchi di più mesi diedero 40,21; 40,25 e 40,97; 40,80 rispettivamente. Diversa, ma sempre piccola, era pure la perdita di peso a 100° dopo 12 ore, cioè 4 % pel preparato più ricco di acqua, e 0,8 % per gli altri due; la solubilità nell'acqua fu trovata in ogni caso, con saggi qualitativi, piccolissima.

Per quanto la concordanza fra le percentuali dei vari preparati non sia molto soddisfacente, tuttavia la loro composizione oscilla entro limiti abbastanza ristretti, aggirandosi tra la formula $Al_2Fl_6 + 6\,H_2O$ (aq. % = 39,04) e $Al_2Fl_6 + 7\,H_2O$ (aq. % = 42,80), e tenendo conto della possibilità che in essi rimanesse ancora una piccola quantità dell'idrato più ricco non trasformatosi, siamo autorizzati a identificarli, in via provvisoria, coll'idrato, di composizione greggia non molto diversa, che vedemmo separarsi spontaneamente dalle soluzioni concentrate di fluoruro di alluminio, e che ne rappresenterebbe la forma più stabile nelle condizioni ordinarie. Per ciò la curiosa trasformazione che subisce, col tempo, l'idrato $Al_2Fl_6 + 17\,H_2O$ conservato a sè, non rappresenterebbe altro che un passaggio dal sistema metastabile allo stabile; e in appoggio di questa asserzione posso citare il fatto che i cristalli di questo stesso idrato con 17 molecole di acqua, se conservati per qualche giorno in contatto delle loro acque madri, spariscono completamente, cedendo il posto a una polvere bianca contenente circa 40 % di acqua, che rappresenta cioè il solito idrato stabile. In questo caso dunque la presenza del solvente facilita la trasformazione che si compirebbe da sè, anche senza il di lui intervento, nel sistema condensato.

Se, per tal modo, operandosi a temperatura non molto diversa dall'ordinaria, si ha una certa uniformità di risultati, questa scomparisce affatto qualora si determini, invece, la perdita di peso a 100° dell'idrato con 17 molecole di acqua. Un campione perdette circa 54,1 %, ciò che dà per la percentuale in acqua dell'idrato residuo circa 22,4 %; un altro perdette 48,7 %, lasciando dunque un idrato al 30,3 %; un terzo perdette 41,8, lasciando un idrato al 37,5 %. Se anche da questi numeri non può dedursi la tendenza alla formazione di un idrato definito, essi avrebbero pur sempre, nella loro negatività, un valore come dati di fatto; ma oltre a ciò si prestano anche a considerazioni di ordine generale su cui mi riservo di tornare più tardi.

Oltre a tutti questi idrati, si sa, per gli studi del Baud, che dalle soluzioni del fluoruro di alluminio può ottenersi il composto $Al_2Fl_6 + 7H_2O$

---

noso e aderente che ingloba anche la parte cristallina; in seguito perciò si trovò più comodo far precedere alla compressione una lavatura sommaria con acqua, ove il nuovo idrato è poco solubile.

per aggiunta di alcool assoluto. Io ho potuto confermare, qualitativamente, tutti i risultati di questo autore, ma non insisterò molto su questo argomento, poichè i saggi finora eseguiti mi condurrebbero a conclusioni, diverse in qualche punto dalle sue, che intendo controllare con più rigorose esperienze. Mi limito ad accennare qui che anche l'idrato del Baud, come già quello con $17\,H_2O$, descritto qui per la prima volta, in contatto dell'acqua finisce col trasformarsi nell'idrato poco solubile cui si è tante volte accennato.

Determinandone infatti la solubilità nell'acqua a 22°, si ottennero risultati poco concordanti, essendo molto maggiore il titolo avuto per la prima soluzione, che per una seconda, ottenuta agitando con nuova acqua il sale rimasto indisciolto. Simili risultati non possono spiegarsi che con una alterazione della fase solida, e tale alterazione si è potuta dimostrare in modo evidente, agitando con acqua una quantità insufficiente di idrato del Baud, che vi si disciolse quasi interamente, tranne qualche piccolo granello rimasto indisciolto. Dopo un certo tempo, dal liquido si ridepose un precipitato bianco, cristallino, che raccolto su filtro e compresso fra carta fornì, all'analisi, il 39,5 % di acqua. La sua composizione, come si vede, rientra fra quelle osservate per l'idrato stabile. Se per tal modo l'idrato del Baud in contatto dell'acqua si trasforma spontaneamente nella forma meno solubile, conservato invece allo stato asciutto sembra mantenersi, a differenza dell'idrato con $17\,H_2O$, affatto inalterato. Un campione vecchio di parecchi mesi non ha cambiato per nulla il suo aspetto, ed è ancora facilmente solubile nell'acqua, soprattutto a caldo.

Infine, accennerò ad un altro idrato, da me preparato per la prima volta, la cui esistenza è interessante per più riguardi.

Se si evaporano a secco su b. m. soluzioni qualsiasi di fluoruro neutro di alluminio, allungate o concentrate, ma dove non si sia separata ancora altra fase solida, il fondo della capsula si cuopre di filamenti dall'aspetto setaceo, facilmente polverizzabili, di cui si è determinato tanto l'acqua che l'alluminio (sia per calcinazione con acido solforico, sia precipitandone la soluzione solforica secondo il metodo di Stock). I risultati, ottenuti su campioni di diverse preparazioni, sono i seguenti: H_2O % = 16,8; 17,5; 17,8; 17,2; Al % = = 26,0; 26,4; 25,1; 26,4; la media conduce alla formula $Al_2Fl_6 + 2H_2O$, per cui si calcola H_2O % = 17,60; Al % = 26,50. Nella preparazione di questo idrato è preferibile partire da soluzioni diluite, o, se se ne usano di concentrate, evaporarne solo una piccola quantità per volta, onde avere uno strato sottile di residuo ed evitare che nelle parti più interne e riparate dalla evaporazione si formi qualcuno degli idrati più ricchi e più resistenti.

Nell'acqua, soprattutto a caldo, questo idrato è non molto, ma completamente solubile, differenziandosi così dagli idrati più ricchi che si depongono a temperatura ordinaria, come del resto è assai notevole che si possa ottenere così, per semplice evaporazione delle soluzioni a 100°, un idrato

tanto povero, mentre la maggior parte degli idrati già formati resistono a codesta temperatura, e, ad es., secondo il Baud, per avere dal suo idrato $Al_2Fl_6 + 7H_2O$ un residuo della composizione $Al_2Fl_6 + 2H_2O$, occorre spingere la temperatura sin oltre 150°.

Alla determinazione quantitativa della solubilità, a temperatura ordinaria, questo idrato ha fornito risultati variabili, avendosi solubilità tanto minore quanto più si prolunga l'agitazione. Questo fatto, al solito, accenna a una trasformazione della fase solida, e infatti la parte indisciolta, raccolta e compressa fra carta, ha dato all'analisi 39,5 e 39,6 % di acqua. Si è dunque riformato anche qui il solito fluoruro, $Al_2F_6 + 6H_2O$, osservato tante altre volte, e che possiamo perciò a buon diritto considerare come il composto più stabile a temperatura ordinaria fra tutti quelli che possono formare $AlFl_3$ e H_2O. Appunto a causa di questa trasformazione che subisce l'idrato $Al_2Fl_6 + 2H_2O$ in contatto dell'acqua, occorre, quando lo si vuole ottenere puro, far procedere la evaporazione tutta in una volta, e non ripigliare la massa già asciutta con nuova acqua. Per riprova di ciò, si evaporò cinque volte in capsula di platino una stessa soluzione, riprendendo ogni volta il residuo con acqua; solo la prima volta si risciolse integralmente il residuo secco, che perse poi l'aspetto setaceo per assumere quello polverulento, e all'analisi fu trovato contenere 37,2 e 37,0 % di acqua, essendosi evidentemente formata una buona quantità dell'idrato con $6H_2O$, che è assai resistente a 100°, come vedemmo. La percentuale di alluminio fu trovata 20,38 e 20,51; la percentuale del fluoro, ricalcolata col rapporto Al: 3Fl, è in media 45,44, mentre dalla differenza a 100 si trova solo 42,45; anche in questo caso dunque esisterebbe una certa quantità di sale basico, ma non in quantità maggiore che nell'idrato che si separa a temperatura ordinaria (v. sopra).

Come già abbiamo fatto osservare, con la presente Nota non può certamente considerarsi esaurito l'interessante tema; molti dei fatti osservati richiedono studi ulteriori; sarebbe poi bene conoscere le condizioni nelle quali l'idrato del Baud può separarsi spontaneamente dalle sue soluzioni acquose, e potere osservare l'equilibrio reversibile fra esso e l'idrato con $17H_2O$ preparato ora per la prima volta; anche il comportamento del fluoruro di alluminio in soluzioni di HFl può portare a risultati non privi di importanza. Ma i fatti sin qui accertati definiscono già, nelle linee generali, la natura degli idrati del fluoruro di alluminio che apparisce un po' diversa da quanto si riteneva finora, e si prestano a varie considerazioni, che mi riservo di esporre in una ulteriore Nota, insieme con alcune osservazioni sullo stato del fluoruro di alluminio in soluzione acquosa.

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia sarda. Ematite di Padria.* Nota di Federico Millosevich.

Patologia vegetale. — *Su alcuni ifomiceti del Mais guasto, e sulla ricerca microscopica per determinarne le alterazioni.* Nota del dott. Ugo Brizi, presentata dal Socio G. Cuboni.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Autolisi nell'endosperma di Ricino.* Nota del dott. Diana Bruschi [1], presentata dal Socio R. Pirotta.

In un precedente lavoro [2] studiai l'autosvotamento dell'albume isolato di ricino e potei stabilire che questo albume si svota autonomamente sol quando abbia ricevuto dall'embrione *in germinazione* uno stimolo speciale senza il quale l'albume in riposo non è capace di entrare in attività.

Ottenuti tali risultati volli stabilire se gli enzimi esistenti nell'albume di ricino, di cui parla pure Reynolds Green [3], e che trovansi nel seme in riposo allo stato di zimogeni, come affermò il Green stesso, potessero divenire attivi in poltiglie di semi e di albumi *in riposo* lasciate in autolisi, o se essi si trovassero in istato di attività solo nelle poltiglie di semi e di albumi già *in germinazione*, come potrebbe far supporre la refrattarietà a svotarsi dell'albume di ricino in riposo.

Per preparare le poltiglie necessarie per le esperienze furono posti numerosi semi a rigonfiare in acqua: dopo 24 ore furono staccati gli embrioni e i cotiledoni dagli albumi, quindi, pestate separatamente le diverse parti, furono addizionate le paste di una quantità misurata di acqua, o di acqua e glicerina. Indi le poltiglie furono conservate in termostato alla temperatura di 25°.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia del R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Rendic. Accad. Lincei, (5), vol. XV, 2° sem., 1906, pag. 563.

(3) Philos. Trans., 1887, vol. CLXXXVII, pag. 57; Annals of Botany, IV, pag. 383 (1890); Green and Jackson, Proc. Roy. Soc., LXXVII, pag. 69 (1905).

Lo stesso si fece con semi germinati in segatura di legno alla temp. di 25°, e con i cotiledoni e gli embrioni di questi, separatamente dagli albumi.

Mescolando poi la prima serie di poltiglie con la seconda seguivo l'azione extra-vitam delle sostanze dell'embrione su le sostanze dell'albume.

Per mantenere asettiche le poltiglie fu aggiunta a ciascuna molto cloroformio e alcune gocce di soluzione satura a caldo di timolo.

Volli poi anche studiare di qual natura fosse la sostanza, proveniente dall'embrione in germinazione, che eccita l'albume dormiente a riprendere l'attività e disciogliere le riserve. A questo scopo una forte quantità di semi in germinazione (lunghezza della plumula circa 1 cm.) fu triturata, torchiata, e la poltiglia mischiata con cinque parti di glicerina al 50 %, fu spremuta per un panno. Il liquido torbido ottenuto fu filtrato, ed il filtrato (estratto glicerinato limpido) fu in parte mischiato a poltiglie di endosperma in riposo od in attività, private dei loro embrioni, in parte lasciato a sè stesso.

Periodicamente determinavo nelle poltiglie a miscugli l'acidità con fenolftaleina e NaOH $^1/_{10}$ normale, lo zucchero riduttore e lo zucchero totale (questo dopo l'idrolisi) col metodo gravimetrico di Allihn.

Accenno fin d'adesso che in quasi tutte le poltiglie e miscugli, nelle prove d'idrolisi (riscaldamento per un ora a bagno maria) eseguite sia con forti dosi di acido cloridrico, sia con dosi deboli od anche senza aggiunta di acido, si constata una notevole diminuzione dello zucchero riduttore ed in talune anche la scomparsa completa delle sostanze riducenti.

A che cosa è dovuto questo fenomeno? Vi è nel liquido un enzima sintetico che diviene attivo col riscaldamento? Ciò sembra strano, perchè alla temperatura del bagnomaria (98°-99°) l'enzima non può resistere, a meno che esso non esplichi una rapida azione nei primi momenti del riscaldamento del liquido. Probabilmente ad alta temperatura si scompongono i globoidi dell'aleurona e si liberano da essi calce e magnesia (1) che formano con gli zuccheri riduttori delle poltiglie saccarati di Mg e Ca. Di questo interessante fenomeno mi occuperò in altro mio studio.

***

Con le dette esperienze ho potuto assodare i seguenti fatti (2):

I proenzimi che trovansi nel seme di Ricino in riposo sono capaci di divenire attivi anche in poltiglie di endospermi in riposo separati dai loro embrioni, in presenza dell'ossigeno dell'aria. Tali enzimi producono la scomposizione delle sostanze di riserva e la formazione di forte quantità di zuc-

(1) Cfr. Rendic. Acc. Lincei, loc. cit., pag. 565.

(2) Per i particolari delle esperienze rimando ad un lavoro più esteso che sarà pubblicato negli *Annali di Botanica* del prof. Pirotta.

cheri riducenti, zuccheri che non possono derivare che dalla decomposizione della principale sostanza di riserva del Ricino: l'olio.

Per es. in una poltiglia di endospermi non germinati, si ebbe subito dopo la sua preparazione un'acidità di 1,0 cmc. di NaOH $^1/_{10}$ normale per 10 cmc. della poltiglia stessa; questa medesima quantità non dette col reattivo di Fehling che minime tracce di riduzione. Dopo 14 giorni invece l'acidità era ancora 1,0, ma lo zucchero riduttore calcolato come di glucosio era divenuto mg. 33,5. Cioè si ebbe la formazione di 0,33 % di zucchero riduttore.

La formazione di queste sostanze riducenti è più attiva in genere nelle poltiglie degli endospermi tolti a semi in germinazione e più ancora di semi interi germinati, con maggiore scomparsa in quest'ultimi di olio, e aumento dell'acidità libera, ma ciò solo dopo il quindicesimo giorno. Sembra quindi che nei primi momenti gli acidi grassi derivati dalla decomposizione dell'olio tendano a trasformarsi, forse con intermedio della glicerina, in zuccheri, mentre in seguito tale formazione di carboidrato diminuisce e gli acidi grassi liberi si accumulano paralizzando l'ulteriore decomposizione dell'olio.

Così una poltiglia di semi germinati mostrava subito dopo la sua preparazione un'acidità di 2,0 cmc. di NaOH normale per 10 cmc. e dava solo tracce di riduzione col Fehling. Dopo 10 giorni l'acidità era ancora la stessa, ma lo zucchero riduttore era salito a mg. 144,6 di glucosio, cioè si era formato 1,4 % di zucchero riduttore; dopo 18 giorni invece l'acidità era giunta a 5,2 cmc. mentre lo zucchero era disceso a mg. 129, cioè ne erano scomparsi mg. 14,4. Ciò forse è dovuto alla presenza di un enzima sintetico.

Se si neutralizza una poltiglia con $MgCO_3$ e la si mantiene esattamente neutra, si forma una quantità assai minore di zucchero, il che fa supporre che per la decomposizione dei materiali di riserva sia necessario un ambiente leggermente acido, o che gli acidi grassi formatisi nella decomposizione dell'olio neutralizzati dalla magnesia non siano più capaci a sintetizzarsi in zuccheri.

Ciò proverebbe che lo zucchero si forma dagli acidi grassi più tosto che dalla glicerina, perchè la lipasi di ricino secondo Armstrong e Ormerod (Proc. Roy. Society, vol. LXXVIII, ser. B, pag. 376 (1906)) agisce anche in ambiente neutro. Dunque non è la glicerina che manchi nelle poltiglie, ma bensì l'acido libero. Come esempio di questo fatto riporto che in un miscuglio di 30 cmc. di precipitato ottenuto trattando con alcool a 95° un estratto glicerinato di semi germinati, e ridisciolto in acqua, e 30 cmc. di poltiglia di endospermi non germinati, reso neutro con $MgCO_3$ e mantenuto tale coll'aggiunta graduale di $MgCO_3$, non dette subito dopo la preparazione del miscuglio alcuna reazione col Fehling. Dopo 8 giorni accusò la presenza di mg. 63,5 di glucosio per 10 cmc. del miscuglio, mentre un'altra miscela identica, ma lasciata acida, dopo 8 giorni dette mg. 380 di glucosio.

Trattando con glicerina al 50 % la poltiglia di semi germinati la maggior parte delle sostanze riducenti rimangono nella pasta e non passano nell'estratto glicerinato. Il precipitato, che si ottiene trattando con alcool a 95° questo estratto, ridisciolto in acqua, è quello che ha maggiore azione nella decomposizione delle sostanze di riserva di albumi in riposo, il che prova essere in questo precipitato riunita la maggior quantità di enzimi. Però insieme ad essi vengono precipitate altre sostanze (albumine, carboidrati e forse un po' d'olio), perchè, ridisciolto in acqua questo precipitato e conservato asetticamente, nel liquido un po' torbido che ne risulta si osserva una potente autolisi con formazione di acidi liberi e di molto zucchero riduttore. Per es. uno di questi precipitati con alcool di semi germinati, presentò subito dopo la preparazione un'acidità di 0,2 cmc. di NaOH $^1/_{10}$ normale, per 10 cmc. del liquido e non reagì col Fehling. Dopo 21 giorni l'acidità era divenuta 1,8 e lo zucchero riduttore calcolato in glucosio era mg. 22,5 per 10 cmc. di liquido soprastante alla poltiglia depositata nel fondo del recipiente, mentre 10 cmc. di tutta la poltiglia acquistarono dopo 36 giorni d'autolisi, un'acidità pari a cmc. 3,4 di NaOH $^1/_{10}$ normale per 10 cmc. e mg. 926 di glucosio, pari al 9,4 %. Un secondo estratto aveva subìto un'acidità pari a cmc. 0,6 di NaOH $^1/_{10}$ normale e non conteneva zucchero riduttore; 18 giorni dopo l'acidità era salita a cmc. 1,0 e lo zucchero riduttore a mg. 380, cioè al 3,8 %. Questo liquido mostrava in grado elevato anche il fenomeno della scomparsa delle sostanze riducenti durante il riscaldamento a bagnomaria; infatti, mentre dopo 18 giorni di autolisi lo zucchero riduttore era, come abbiamo visto, mg. 380, nell'idrolisi scese a mg. 85,9, ne scomparvero cioè mg. 294,1, o il 77 %.

***

Per determinare in quali parti del seme in riposo si trovi la chimosina o enzima coagulante, che già il Green aveva trovato negli endospermi in germinazione, e se esso esista nel seme allo stato di zimogeno o più tosto di enzima attivo, posi a rigonfiare un gran numero di semi; dopo 24 ore separai gli embrioni e i cotiledoni dagli albumi, quindi pestati separatamente e addizionati di acqua e cloroformio furono posti in termostato a 25°. Con queste poltiglie feci periodicamente prove di coagulazione, tenendo 10 cmc. di latte e 10 cmc. di poltiglia in un bagno a temperatura costante di 44°, avendo cura di agitare continuamente il miscuglio. Con la poltiglia di endospermi non germinati si ottiene la coagulazione del latte entro un tempo pressochè uguale (da 52' a 58') tanto nella prima prova eseguita subito dopo aver fatta la poltiglia, sia nelle prove successive, il che mostra che l'enzima attivo esiste già nel seme in riposo e non allo stato di zimogeno; in caso diverso l'attività dell'enzima dovrebbe aumentare durante l'autolisi.

Non ottenni invece sul principio alcuna coagulazione con le poltiglie o gli estratti dei cotiledoni e degli embrioni, cosicchè credetti da prima che l'enzima coagulante esistesse solo negli endospermi. Anche Green affermava ciò, sempre però per gli endospermi dei semi germinati. Però essendo le poltiglie degli embrioni e dei cotiledoni molto più diluito di quelle degli albumi, ritentai la prova con una poltiglia molto più densa ottenuta con embrioni e cotiledoni tolti a ben 158 gr. di semi in riposo, e triturati con 15 cmc. di acqua e 15 cmc. di glicerina. Con questa poltiglia infatti ottenni la completa coagulazione del latte in 48^m; tempo però maggiore di quello occorrente per la poltiglia egualmente concentrata dei rispettivi endospermi in riposo (33^m).

Le poltiglie di ricino scaldate a 100° perdono la proprietà di coagulare il latte. Si tratta dunque realmente di un enzima. Quale ufficio esso abbia nel seme di ricino mi è ignoto. Facendo agire la poltiglia di endospermi in riposo su di una soluzione di peptone al 10 %, si forma in pochi giorni un precipitato bianco grigiastro polverulento, che ricorda la *plasteina* che per azione degli estratti di mucosa gastrica si forma nelle soluzioni concentrate di peptoni.

Su la chimosina del Ricino contituano le mie ricerche.

Patologia vegetale — *Sulle micorize endotrofiche della vite.* Nota di L. Petri presentata dal Socio G. Cuboni.

Nel corso di alcune ricerche sopra le alterazioni prodotte dalla fillossera sulle radici della vite ho potuto osservare alcuni fatti degni di nota relativamente alla presenza e ai caratteri citologici delle micorize endotrofiche di questa pianta che furono già segnalate da Stahl (1), ma solo come un fatto isolato.

Più ampie notizie a questo riguardo saranno date in una memoria ora in corso di stampa, mi limito qui ad accennare ai fatti principali da me constatati.

Le lesioni fillosseriche sulle radichette erbacee di *Vitis vinifera* sembrano aumentare fortemente il grado di ricettività di quest'ultime pel fungo endofita, il quale è frequentissimo in quelle radichette che terminano con una nodosità, i tessuti iperplastici di questa non sono però mai invasi direttamente dall'esterno, la parte di micelio che si conserva intercellulare raggiunge più o meno presto questi tessuti anormali e ricchi di amido, diffondendosi attraverso il parenchima corticale della radichetta non rigonfiata, nella quale penetra quasi sempre al suo punto di origine dalla radice madre.

1) Stahl, *Der Sinn der Myhorrhizenbildung.* Jahrb. f. wiss. Bot. XXXIV.

Nelle viti non fillosserate la presenza della micoriza non è così frequente come in quelle presentanti nodosità; nei vitigni americani poco resistenti l'endofita si comporta come nelle radici della vite nostrale diventando frequentissimo nel caso di piante fillosserate; in alcuni vitigni molto resistenti e con una minima ricettività per l'insetto la micoriza manca totalmente, almeno per quanto ho potuto osservare sinora.

Questa relazione fra la presenza dei due parassiti è forse spiegabile ammettendo che le condizioni di ricettività nelle radichette per l'uno e per l'altro sieno le stesse, però è molto probabile che l'azione precedente della fillossera predisponga all'infezione, da parte del fungo endofita, le giovani radici.

Nessun carattere esterno appariscente svela la presenza della micoriza. I fatti più notevoli relativi al comportarsi del micelio intracellulare, prima e durante la formazione dei corpi chiamati *sporangioli* da Janse (1) e *prosporoidi* da me (2), sono i seguenti: 1° La formazione di un reticolo di sottilissime ife intorno ai granuli d'amido che vengono ben presto disciolti. 2° Un maggiore differenziarsi degli elementi nucleari nelle terminazioni di queste fini ramificazioni dell'ifa primitiva, un differenziamento che ricorda le fasi presentate dal *sinkarion* dei basidi prima della cariogamia. 3° Successivamente a questo stadio l'iperproduzione di sostanze proteiche all'estremità delle fini ramificazioni. 4° L'originarsi graduale, per una trasformazione chimica di queste ramificazioni e delle sostanze in esse contenute, dei *prosporoidi* o *sporangioli*.

Questi corpi deriverebbero quindi dalla trasformazione, per azione enzimatica o autolitica, di speciali porzioni delle sottili ramificazioni dell'ifa intracellulare (*arbuscules* di Gallaud (3)) e non di *tutta* la massa di quest'ultime come afferma questo autore.

Questo fungo, come in generale tutti i miceli formanti micorize endotrofiche, invadendo il parenchima corticale primario si tiene sempre a una certa distanza dalla regione apicale, limitando il suo sviluppo a quella porzione della corteccia dove le cellule, passando allo stato definitivo, si riempiono di amido. Il micelio non invade mai così il cilindro centrale, difeso dall'endodermide suberificata.

La lesione fillosserica apporta una profonda modificazione a questo stato di cose: arrestando l'accrescimento in lunghezza della regione apicale e trasformandone contemporaneamente i caratteri istologici e la natura del contenuto cellulare, determina le condizioni favorevoli al progredire dell'endofita sino all'estremità delle radichette, dove, per il processo ipoplastico provocato dalla lesione, l'endodermide non è differenziata e in tal modo l'azione parassitaria del fungo può apportare gravi conseguenze ai tessuti fibro-vascolari

(1) Ann. Jard. bot. Buitenzorg XIV.
(2) Nuovo Giorn. bot. ital. X.
(3) Rev. Gen. Bot. XVII.

ancora poco o punto differenziati. L'iperplasia del parenchima corticale con la conseguente abbondante quantità di amido contenuta nelle sue cellule costituisce d'altra parte un potente stimolo all'avanzarsi del micelio in questa regione della radichetta.

Questo fatto in certi casi contribuisce ad affrettare l'entrata dei parassiti poco virulenti e dei saprofiti nei tessuti delle nodosità.

Sulle radichette fillosserate, conservate in camera umida, il micelio esterno dell'endofita origina dei filamenti moniliformi che sono identici a quelli descritti da Bernard [1] come filamenti conidici dell'endofita delle orchidee.

Una germinazione di questi presunti conidi non è stata per ora accertata in coltura pura.

Biologia. — *Contributo allo studio dell'ibridismo negli Uccelli.* Nota di Alessandro Ghigi, presentata dal Socio C. Emery.

La questione dell'ibridismo è della massima importanza, perchè ad essa si connettono alcuni dei più importanti problemi biologici, fra i quali primeggiano i criterî che debbono guidare il sistematico nello stabilire se determinati gruppi di forme debbano ritenersi buone specie, oppure varietà della medesima specie.

È noto come fino dai tempi del Cuvier, la fecondità e la sterilità degli ibridi venissero considerate quali ottimi criteri per la distinzione delle specie, ritenendo che i meticci fecondi provengano dall'accoppiamento di individui appartenenti a razze o varietà della medesima specie, ed i bastardi sterili dall'unione di individui appartenenti a specie diverse.

Questo concetto cadde col tempo, in base ad una serie di osservazioni che apparvero in contraddizione con esso, e si affermò, anche in recenti trattati di Zoologia, che le difficoltà dell'incrociamento non sono assolutamente in proporzione esatta colla divergenza della specie e che non sempre i meticci sono fecondi nè i bastardi sterili.

A queste conclusioni hanno contribuito due ordini di fatti.

Le uova di *Echinus microtuberculatus* vengon fecondate da sperma di *Strongilocentrotus lividus*, ma le uova di questo non son fecondate dallo sperma di quello. Il seme di *Salmo fario* feconda le uova di *Salmo salar*, ma lo sperma del salmone non feconda le uova di trota.

Sebbene eccezionalmente, pure non mancano, si disse, casi di fecondità nel mulo; si ottennero bastardi di lepri e conigli che si sono mantenuti fecondi per intere generazioni; gli *chabins* delle Ande sarebbero infine bastardi fecondi fra pecore e capre.

(1) Rev. Gen. Bot. XVI.

Questo secondo gruppo di fatti, non ha oggi alcun valore per la semplice ragione che essi sono dimostrati insussistenti: non è provata la fecondità del mulo; pare assodato che i supposti leporidi fecondi non siano altro che veri conigli di razze somiglianti ai nominati bastardi; sembra certo che lo *chabin* sia una razza particolare della pecora e perciò la sua fecondità non avrebbe alcunchè di straordinario (1).

Ed anche il primo gruppo di fatti non ha, in contraddittorio, grande importanza. Ammesso che quelle specie di echinodermi e di pesci siano strettamente affini, la mancata fecondazione in un determinato senso non è prova di incapacità sostanziale alla fecondazione stessa. È necessario infatti distinguere una sterilità primaria da una sterilità secondaria: due germi possono essere specificamente differenti e non coniugarsi per cause che si possono dunque ritenere intrinseche alla natura del plasma germinale, ma due germi possono anche essere specificamente simili e non coniugarsi per cause estranee alla struttura del plasma stesso. Supponiamo che una specie A abbia la membrana dell'uovo più resistente di quella posseduta dalla specie B, e che il potere di penetrazione degli spermatozoi sia in relazione per ambedue le specie con tale resistenza, è chiaro che gli spermatozoi di A potranno entrare facilmente nelle uova di B e che quelli di B non potranno entrare nelle uova di A. È certo altresì che il micropilo delle uova a guscio resistente, come quelle dei pesci, deve essere in relazione colla grandezza dello spermatozoo corrispondente; ora è evidente che piccoli spermatozoi potranno entrare facilmente in uova di specie diversa a spermatozoi grandi, ma questi non potranno entrare nelle uova di specie a spermatozoi piccoli: questa è forse la ragione per la quale con sperma di trota si possono fecondare le uova di salmone e non viceversa.

Con ciò le due principali obbiezioni mosse al concetto che la sterilità e la fecondità dei prodotti d'incrocio, possano costituire un indice sicuro per stabilire i limiti di una specie verso un'altra, perdono d'importanza, ed il biologo è nuovamente attratto verso un campo che non è stato ancora oggetto di ricerche sperimentali sufficienti.

Da quindici anni allevo con cura varie specie di uccelli, specialmente galliformi; le osservazioni raccolte mi hanno suggerito le opinioni che intendo pubblicare in questa Nota, dopo di avere esposto i fatti sui quali si basano.

Descrizione sommaria di alcuni ibridi nei Phasianidae. — Comincerò coll'enumerare i varî incroci da me ottenuti, accennando sommariamente a quei caratteri che possono avere importanza dal punto di vista generale.

Seguendo le regole della nomenclatura zoologica, il nome del padre precede sempre il nome della madre; quando debbo parlare di soggetti nati

(1) Suchetet A., Problèmes hybridologiques, Journ. d'Anat. et Physiol. XXXIII année, 1897.

da un individuo puro e da un individuo incrociato, i nomi dei genitori di quest'ultimo sono compresi fra parentesi.

Gl'ibridi che non recano alcuna frase descrittiva sono noti e già descritti da altri autori.

a) Ibridi nel genere *Gennaeus*.

1. *Muthura* × *horsfieldi*. — ♂ Aspetto generale intermedio fra le due specie, per la forma del corpo, per la lunghezza del ciuffo e delle timoniere. Le piume dei fianchi sono leggermente lanceolate e sfumate in grigio cupo, specialmente lungo la rachide. Le penne del groppone e del sopracoda, con sfumature bluastre, anzichè essere largamente marginate di bianco, hanno l'orlo finemente ed irregolarmente striato. Sono pure finemente marginate di bianco, nei giovani, le piume del dorso, le scapolari e le copritrici delle ali, mentre negli adulti queste forme sono interamente nere. Le timoniere su fondo nero lucente sono sparse, verso la base, di finissime ed irregolari strie biancastre.

♀ Somigliantissima nell'aspetto generale alla madre, in modo da non distinguerla da questa per il piumaggio; per la forma del ciuffo e lunghezza della coda si può considerare intermedia, ma, tutto sommato, non conoscendone l'origine incrociata, si potrebbe determinare come *G. horsfieldi*.

2. *Argentatus* × *muthura*. — ♂ Adulto si avvicina nella forma generale del corpo al padre; anche pel piumaggio striato di bianco e di nero si accosta grandemente a quest'ultimo e non presenta alcun carattere che permetta di riconoscervi il sangue materno, se si eccettuano le rachidi biancastre delle penne lanceolate dei fianchi e del petto. Si può definire meglio come un *G. lineatus*, nel quale le strie bianche del manto siano più larghe, la coda assai più lunga ed arcuata, il ciuffo abbondante e refluente. Le timoniere mediane hanno il vessillo interno bianco cenerognolo scarsamente rigato di nero, quelle delle paia laterali sono trasversalmente striate, ma sul vessillo esterno il nero predomina sul bianco in modo assoluto. Nei giovani il petto è quasi interamente nero; sul dorso e sul groppone le penne sono striate di nero e di biancastro; le timoniere mediane sono di colore fondamentale grigio-ferro attraversate da striscie più chiare e più scure, le laterali sono nere più o meno scarsamente striate di bianco.

La ♀ rassomiglia alla femmina del fagiano argentato: ne differisce principalmente per le zampe, come quelle del ♂ biancastre anzichè vermiglie, pel ciuffo un poco più lungo, pel ventre più rigato, per le timoniere laterali con striscie bianche meno regolari e più strette. Complessivamente in ambo i sessi di questo ibrido predominano caratteri paterni.

3. *Argentatus* × *lineatus*. — ♀ Predominano in modo assoluto i caratteri materni: differisce dalla madre pel ciuffo leggermente più breve, per la mancanza di strie submarginali alla base del collo, e pel fatto che il

fondo delle parti inferiori anzichè bianco cenerognolo è giallastro sporco. Zampe vermiglie.

4. *Argentatus* × *horsfieldi.* — ♂ giovane. Rassomiglia al ♂ di *argentatus* × *muthura*, senonchè il ciuffo è diritto e la larghezza delle strie bianche e nere essendo quasi eguale, fa risultare una intonazione complessiva più scura.

♀ Nel suo complesso è straordinariamente simile alla femmina *muthura*, della quale riesce più cupa per avere meno accentuate le strie terminali chiare, che orlano la maggior parte delle penne e ne differisce pel fatto che le timoniere laterali sono attraversate da strie irregolari biancastre.

5. *Argentatus* × *swinhoii.* — Questi sono ibridi conosciuti; il maschio non presenta nè la regolarità di strie dell'*argentatus*, nè alcuno dei colori brillanti dello *swinhoii*; predominano tinte bruno-rossicce più o meno striate di nero.

6. *Lineatus* × *muthura.* — ♂ Quasi identico al padre, ne differisce per la maggior finezza delle strie bianche e nere che si alternano sul dorso, per il groppone leggermente sfumato in bleu, per leggere sfumature grigie sul nero dei fianchi e più di tutto pel fatto che le timoniere laterali sono quasi interamente nere mentre nel puro *lineatus* le strie bianche hanno la medesima larghezza delle nere.

Il giovane pollastro di questo ibrido offre subito fianchi e dorso rigati, come il giovane *lineatus*.

Anche la ♀ rassomiglia interamente alla ♀ *lineatus*, solamente è priva di striscie nerastre sul dorso ed il colore fondamentale delle parti inferiori non ha l'intonazione slavata della specie pura. Allo stato giovanile al contrario è completa la rassomiglianza coi pollastri giovani di *muthura*.

7. *Lineatus* × *swinhoii.* — ♂ Ciuffo nero con strie rosse e biancastre. Piume del collo con base nera e parte apicale bianca, irregolarmente spruzzata di bruno e di nero. Su fondo nero, sono pure fittamente striate di bruno e di bianco gialliccio verso il terzo apicale, le penne del dorso e le scapolari. Copritrici delle ali nere lucenti con orlo verde cupo; lungo la rachide evvi sulla parte basale una macchia bruna. Groppone e sopracoda simili a quelli del maschio Swinhoe giovane: neri con fascie marginali azzurro-porporine spruzzate di bruno rosso. Timoniere mediane nere con strie trasversali oblique biancastre e rosso brune; le altre timoniere hanno strie ancor più irregolari e sottili bruno-rosse, più manifeste alla base ed all'apice che non sulla parte mediana. Le parti inferiori sono nere; le piume lanceolate dei fianchi, cangianti in bleu, offrono la stria bianca caratteristica del *G. lineatus*. Zampe color carnicino chiaro.

8. (*Argentatus* × *muthura*) × *lineatus.* — ♀ Sono scomparsi completamente i caratteri del *muthura*, talchè questa forma può considerarsi come giustamente intermedia per forma e colorito fra la femmina dell'*argentatus* e quella del *lineatus*.

9. *Lineatus* × (*Argentatus* × *muthura*). — Predominano in ambo i sessi ed in modo assoluto i caratteri del *lineatus*, nè questa forma si può considerare come ben differente da quella descritta fra *lineatus* e *muthura*. Tuttavia la distribuzione delle striscie sulle parti superiori sembra meno regolare e, nel maschio, tanto sulla nuca al di sotto del ciuffo, quanto sul groppone si osservano sfumature nerastre.

10. (*Argentatus* × *muthura*) × *argentatus*. — I maschi di questo incrocio, ottenuto nella scorsa primavera non sono ben caratterizzati; alcune parti del loro piumaggio consentono tuttavia di prevedere quale sarà il loro aspetto definitivo: probabilmente rassomiglieranno in tutto all'*argentatus* e non si distingueranno dalla specie pura se non pel fondo del manto leggermente plumbeo e pel vessillo esterno delle timoniere laterali più nero.

La femmina, sebbene abbia il ventre marcatamente rigato di nerastro, non si può dire che sia in modo apprezzabile diversa dalla femmina pura.

b) nel genere *Phasianus*.

11. *Versicolor* × *colchicus*. — È forma conosciutissima, nella quale tutte le penne delle parti inferiori del maschio sono color marrone con una larga fascia marginale verde bottiglia.

12. *Torquatus* × *colchicus*. — È pure forma conosciutissima, nella quale è presente il collare bianco, i fianchi sono più chiari ed il groppone bronzato anzichè marrone come nel *colchicus*, o verdognolo come nel *torquatus*.

13. *Mongolicus* × (*torquatus* × *colchicus*). — Aspetto generale simile al *colchicus*; dei caratteri paterni conserva la sfumatura cangiante in porporino del petto e delle parti inferiori; nel mezzo del dorso si trovano alcune penne di color violaceo scuro, mentre tutto il resto del groppone e sopracoda differisce insensibilmente dal *colchicus*. Anche le scapolari offrono uno stretto orlo violaceo scuro.

c) nel genere *Chrysolophus*.

14. *Amherstiae* × *pictus*.

15. *Amherstiae* × (*Amherstiae* × *pictus*).

16. *Amherstiae* × (*Amherstiae* × (*Amherstiae* × *pictus*)).

17. *Obscurus* × (*Amherstiae* × (*Amherstiae* × *pictus*)).

Come è noto, in questa serie di ibridi i caratteri del *pictus*, ultimi a scomparire, sono il rosso delle parti inferiori e l'aspetto marmoreggiato del nero nella coda: anzi ho potuto accertare che si è costituita una razza domestica di fagiano di Lady Amherst, proveniente dall'incrocio col dorato e differente dalla specie selvaggia, pel fatto che la mole è minore e le timoniere mediane, pur su fondo candido, offrono marmoreggiature nere simili a quelle degli ibridi col dorato e non larghe fascie trasversali come quelle dell'*Amherstiae*.

d) fra i generi *Phasianus* e *Chrysolophus*.

18. *P. torquatus* × (*C. pictus* × (*Amherstiae* × *pictus*)). — Di questa forma ha ottenuto parecchi esemplari ♂, 3 dei quali ora da me posseduti, il cav. Oreste Rosso di Mondovì, da esemplari giovani cresciuti assieme e mai separati. Nella voliera non si trovavano femmine *torquatus*.

Aspetto generale simile a quello dei giovani *pictus*, con intonazione complessiva rosso-bruna; la base del collo offre piccole penne violette con riflessi d'anilina; le timoniere mediane sono quasi piatte, di colore isabellino scuro, spruzzate di bruno. L'unico carattere appariscente del *torquatus*, sta nella forma e nell'estensione della pelle nuda vermiglia intorno all'occhio, leggermente dilatabile quando l'animale accenna a voler litigare cogli altri.

e) nel genere *Numida*.

19. *Meleagris* × *ptilorhyncha*. — Ho già descritto esattamente questo incrocio in una recente pubblicazione (1); mi limito a ricordare che per la forma ed il colorito delle caruncole esso può considerarsi intermedio fra le due specie, mentre pel piumaggio taluni esemplari tendono maggiormente all'una, altri all'altra delle specie dalle quali hanno avuto origine.

20. (*Meleagris* × *ptilorhyncha*) × *ptilorhyncha*. — Qui predominano in modo assoluto i caratteri della madre, eccettuata la sfumatura violetta nel margine esterno delle secondarie che, in alcuni esemplari, manca. I miei esemplari sono ancora giovani, e perciò è difficile stabilire ora se le appendici carnose della fronte rimarranno allo stato rudimentale, come sono oggi, o se acquisteranno sviluppo notevole.

f) fra i generi *Pavo* e *Numida*.

21. *P. cristatus* × *N. meleagris*. — Ottenni un maschio che ho descritto e figurato altrove (2).

Fecondità e sterilità negli ibridi. — Negli ibridi precedentemente descritti ho accertata la fecondità dei seguenti:

1. *Muthura* × *horsfieldi* . . . . . } *Gennaeus*
2. *Argentatus* × *muthura* . . . . . } *Gennaeus*
3. *Argentatus* × *lineatus* . . . . . } *Gennaeus*
4. *Lineatus* × *muthura* . . . . . } *Gennaeus*
5. (*Argentatus* × *muthura*) × *lineatus* . . . . . } *Gennaeus*
6. *Lineatus* × (*argentatus* × *muthura*) . . . . . } *Gennaeus*

(1) Atti del Congresso dei Naturalisti italiani, 15-19 settembre 1905.

(2) *Di un ibrido fra Numida e Pavone*, Monit. Zool. Ital., suppl. 1900; *Contribuzioni alla biologia ed alla sistematica dei Phasianidae*, Arch. Zool. Ital. Tav. 17 1903.

7. *Versicolor* × *colchicus* . . . . . } *Phasianus*
8. *Torquatus* × *colchicus* . . . . . }
9. *Mongolicus* × (*torquatus* × *colchicus*) . . . . }

10. *Amherstiae* × *pictus* . . . . . }
11. *Amherstiae* × (*amherstiae* × *pictus*) . . . . . } *Chrysolophus*
12. *Obscurus* × (*amherstiae* × (*amherstiae* × *pictus*) . }
13. *Amherstiae* × (*amherstiae* × (*amherstiae* × *pictus*)) }

14. *Meleagris* × *ptilorhyncha*. . . . . *Numida*

La fecondità di tali ibridi è assoluta; essa si manifesta tanto negli accoppiamenti fra loro, quanto negli accoppiamenti con l'una o l'altra delle specie progenitrici, persistendo nelle generazioni successive.

Non ho accertata la fecondità nei casi seguenti:

1. *Argentatus* × *horsfieldi*. . . . . } *Gennaeus*
2. (*Argentatus* × *muthura*) × *argentatus*. . . . . }
3. (*Meleagris* × *ptilorhyncha*) × *ptilorhyncha*. . . *Numida*
4. *Phasianus torquatus* × *Chrysolophus* (*pictus* × (*amherstiae* × *pictus*)).

Si tratta di esemplari giovani della primavera scorsa, i quali non possono avere ancora normalmente riprodotto, ma dei quali è certa pei primi 3 casi la riproduzione, in questa primavera o in quella dell'anno venturo, mentre per l'ultimo è quasi certa la sterilità.

Ho accertato la sterilità nei casi seguenti:

1. *Gennaeus swinhoii* × *argentatus*
2. *Gennaeus lineatus* × *swinhoii*
3. *Pavo cristatus* × *Numida maleagris*.

Caratteri degli ibridi fra specie sistematiche diverse. — Secondochè gl'ibridi sono fecondi o sterili, presentano determinati caratteri morfologici, che possono essere *armonici* od *atavici*.

Quando i caratteri degl'ibridi si possono considerare come una combinazione armonica dei caratteri esistenti nei genitori, quando il piumaggio maschile è intermedio fra quello dei due maschi, si può esser certi, in rapporto ai Fasianidi, che i prodotti dell'incrocio sono fecondi. Fra i più tipici incroci di questa categoria sono quelli del fagiano argentato col mutura, e quelli del mutura col lineato. È noto come il mutura abbia le parti inferiori cenerognole e chiare e le superiori bleu acciaio lucente; le altre due specie hanno nere le parti inferiori, e le superiori rigate più o meno intensamente di bianco. Il bleu unito del mutura non guasta con sfumature nè macchie la regolarità delle strie negli incroci, ma diminuisce soltanto la larghezza delle strie bianche. È noto altresì come gl'incroci del fagiano

Dorato col Lady Amherst siano più appariscenti e più belli delle specie pure e come anche siano magnifici gl'incroci del *Ph. versicolor* col comune. Se, al contrario, esaminiamo gl'ibridi fra il fagiano Argentato ed il fagiano di Swinhoe, fra questo ed il Lineato, fra il Pavone e la Faraona troviamo un prodotto assai meno appariscente di ciascuno dei genitori, e nel quale sono scomparsi i caratteri più brillanti, essendo stati sostituiti da caratteri riferibili piuttosto ai giovani od alle femmine: tali caratteri sono evidentemente *atavici*, e si manifestano in quelle forme incrociate, che l'esperimento dimostra sterili. Non intendo con questo affermare l'assoluta ed immediata sterilità di tali ibridi; ho avuto femmine *Swinhoii* × *Argentatus*, che hanno deposto uova, ma queste non sono mai state fecondate nè da maschio ibrido nè da maschio puro delle due specie progenitrici. Il Suchetet, afferma di avere avuto una generazione di prodotti, ma poi questi si sono dimostrati assolutamente sterili. Anche nei bastardi fra canarino e cardellino, le femmine spesso depongono uova, incapaci di essere fecondate.

Sono adunque in grado di enunciare la regola seguente:

Quando due specie di fasianidi, incrociandosi, generano ibridi con caratteri armonici, si può presumere che essi siano fecondi; quando invece gl'ibridi offrono caratteri atavici, si può presumere che essi siano sterili.

È noto come non tutte le specie di fasianidi sviluppino i loro caratteri sessuali secondari alla medesima età; talune sostituiscono direttamente l'abito giovanile con quello brillante definitivo; altre non rivestono quest'ultimo che dopo uno o due anni di vita, dopo aver posseduto un abito intermedio poco dissimile da quello femminile.

Negl'ibridi fra specie a caratteri sessuali secondari tardivi e specie a caratteri sessuali secondari precoci, fra l'abito giovanile e quello definitivo intercede un abito intermedio, composto di penne in parte simili a quelle dei giovani ed in parte simili a quelle degli adulti. Hanno aspetto giovanile i pterilii e loro parti che iniziano la muta; hanno aspetto adulto i pterilii e loro parti che si cambiano per ultimi.

Si osserva l'applicazione di questa regola negli incroci fra *G. argentatus* e *G. muthura*, *G. argentatus* e *G. horsfieldi*; dove l'argentato è tardivo, gli altri due precoci.

Le remiganti secondarie, per esempio, e le piccole copritrici dell'ala sono in queste forme di color nerastro spruzzate di bruno, ma le scapolari e le copritrici più grandi, sono regolarmente e nettamente striate di bianco e nero. Così dicasi del dorso e del sopracoda: talune penne che spuntano relativamente presto e terminano tardi, offrono la porzione apicale spruzzata di bruno e quella basale striata di bianco.

Quando un incrocio deriva da tre specie distinte, ed una di queste si può considerare come intermedia fra le altre due, nell'incrocio predo-

minano notevolmente i caratteri appartenenti a quest'ultima, anche se rappresentata da un sol quarto di sangue.

Se disponiamo ad esempio delle serie di specie secondo l'ordine di gradazione di certi loro colori, andando dai più cupi ai più chiari, dai più uniti ai più rigati, avremo la seguente disposizione:

Phasianus mongolicus	*Gennaeus muthura*
» *colchicus*	» *lineatus*
» *torquatus*	» *argentatus*

Gl'incroci triplici in questi generi, ottenuti secondo le formule indicate in principio, si riferiscono pei loro caratteri rispettivamente al *colchicus* ed al *lineatus*, ed ove si rinvenissero allo stato selvatico, dubito assai che l'ornitologo potesse considerarli come appartenenti a specie diversa: noterebbe certo qualche piccola differenza, che attribuirebbe piuttosto a piccole variazioni anzichè a diversità specifica.

Quali accoppiamenti possano dar luogo a prodotti fecondi e quali no. — *Fra specie morfologicamente affini, si ottengono prodotti fecondi, quando i genitori abbiano gli stessi caratteri etologici; si ottengono ibridi sterili quando i genitori abbiano caratteri etologici diversi.*

Allorchè due specie, anche notevolmente dissimili l'una dall'altra per grandezza e piumaggio, come il fagiano Dorato ed il fagiano di Lady Amherst, hanno la stessa voce, lo stesso modo di corteggiare la femmina, le medesime tendenze nell'incedere, nell'alzarsi a volo e nell'aggredire, la medesima durata nell'incubazione delle uova, si può presumere che i prodotti dell'accoppiamento siano fecondi. Nel caso contrario si potranno ottenere anche molti di tali prodotti, ma questi saranno sterili.

Tutti gli ibridi da me ottenuti, compresi quelli di *Numida*, rispondono a questo principio, che io sono disposto ad estendere all'intera famiglia dei *Phasianidae*, anche per una considerazione commerciale che mi sembra tuttavia abbia molto valore.

La grande diffusione degli incroci tra fagiano Dorato e Lady Amherst deve la sua origine al fatto che cinquant'anni or sono il Lady Amherst costava dalle mille alle millecinquecento lire per capo, secondochè si trattava del maschio o della femmina; gli amatori trovarono che il maschio Lady riproduceva bene colla femmina dorata e che anzi accoppiando successivamente femmine d'incrocio con maschio puro si giungeva, dopo tre generazioni, ad ottenere un prodotto quasi eguale al puro. Egual sorte ebbe il *Phasianus versicolor* incrociato col *colchicus*. Ora io credo che se fosse possibile ottenere i medesimi risultati incrociando un maschio *Ph. soemmeringi* o *ellioti* o *wallichii* con femmine comuni; *Gennaeus diardi* o *nobilis* con femmine di *argentatus* o *muthura*, gli allevatori non avrebbero mancato di fare tali

incroci, che avrebbero provocato un ribasso sensibile nel prezzo di queste specie, come è avvenuto per il Lady Amherst ed il *Versicolor*.

Significato della fecondità e sterilità negli ibridi in rapporto alla sistematica. — I risultati esposti, uniti a quelli studiati dal Suchetet [1] negli uccelli in generale e nei mammiferi, hanno ingenerato in me la convinzione che l'antico concetto cuvieriano sia giusto. Io credo che realmente la fecondità e la sterilità degl'ibridi costituiscano un ottimo criterio per distinguere fra loro le vere specie: queste, quando, ben inteso, siano genealogicamente affini, dànno ibridi sterili o di limitatissima fecondità come i bastardi fra tortora e piccione, fra cardellino e canarino; ma *quando dall'incrocio di due specie sistematiche nascono meticci fecondi, i quali offrono tutti i vantaggi caratteristici ai meticci delle razze domestiche, dobbiamo ritenere di non avere a che fare con due specie reali e distinte, ma con razze locali o tutt'al più con varietà della medesima specie.*

Il sistematico giudica in base alle forme e su queste determina le affinità; il suo giudizio può essere tuttavia erroneo e dall'esperimento dobbiamo attenderci di vedere spesso dimostrato che forme ritenute affini non lo sono affatto, mentre altre considerate come buone specie non sono che varietà o razze della medesima specie.

I piccioni domestici non sono in massima parte assai più differenti morfologicamente dalla *Columba livia*, che non questa dalla *Columba oenas* o dalla tortora? Eppure noi sappiamo che quelli appartengono alla medesima specie e s'incrociano con vantaggio immenso della prole, mentre i bastardi del piccione e della tortora sono sterili, ovvero dotati di limitatissima fecondità e soltanto nell'accoppiamento con uno dei genitori.

Patologia. — *Sulla morfologia e sul ciclo evolutivo del parassita della rabbia* [2]. Nota del dott. A. Negri, presentata dal Socio B. Grassi (con una tavola).

Dal giugno del 1905 io ho reso nota una serie di fatti sulla struttura e sul ciclo evolutivo del parassita specifico dell'infezione rabica [3].

Le fine particolarità di struttura da me allora descritte si riferivano alle forme parassitarie endocellulari che con maggiore frequenza si riscontrano e si possono osservare nel sistema nervoso degli animali idrofobi, a quelle forme del parassita, cioè, che sole — si può dire — sono state prese in considerazione da quanti si sono occupati dell'argomento.

(1) Opera ornithologica, 1888-1897.

(2) Lavoro eseguito nel laboratorio di Patologia generale della R. Università di Pavia.

(3) *Sull'eziologia della rabbia. Note sulla morfologia e sul ciclo evolutivo del parassita specifico.* Boll. Soc. Med. Chir. Pavia, 1905.

Tali forme, come ho ripetutamente detto e come è ormai bene accertato, si presentano in modo caratteristico e costante.

Qualunque siano le dimensioni del parassita in questi stadi, nel suo interno, in condizioni opportune, si rileva la presenza di particolari formazioni che in modo schematico si possono raggruppare in due categorie: corpicciuoli piccoli, rotondeggianti, rifrangenti; corpi più grandi, meno rifrangenti, rotondeggianti od ovali o di forma irregolare, di aspetto granuloso.

Le formazioni interne non solo si osservano quasi sempre e con chiarezza nei parassiti, nelle sezioni di tessuto nervoso fissate e colorate con procedimenti svariati, ma anche senza colorazione alcuna, sia nelle sezioni che nei preparati per dilacerazione; con la massima chiarezza poi, in modo speciale per quanto si riferisce ai loro caratteri, si rilevano nei parassiti esaminati a fresco, in acqua o in soluzione fisiologica o in soluzione assai diluita di acido acetico. Quest'ultimo modo di esame fa escludere che si tratti di eventuali prodotti artificiali da riferirsi all'azione dei liquidi fissatori ovvero ai metodi di colorazione adoperati; dimostra invece che le formazioni interne sono l'espressione di vera struttura del parassita.

Ripeto però che l'accennata suddivisione è alquanto schematica. Tra i più grossi corpi granulosi, poco rifrangenti, rotondeggianti od ovali od irregolari, ed i corpicciuoli rotondeggianti, rifrangenti, assai più piccoli, esistono invero differenze notevoli; ma devo pure aggiungere che dall'esame di numerosi parassiti, qualche volta di uno stesso parassita, risulta l'esistenza di tutta una serie di formazioni che conducono per gradi dall'una all'altra delle due categorie. Tra esse, di conseguenza, non esiste un limite di divisione molto netto... tale almeno è l'opinione ch'io mi sono formato.

La struttura delle peculiari formazioni interne del parassita è stata appunto oggetto, in parte, della mia ultima Nota.

Dopo quanto ho ripetutamente detto, è superfluo che mi diffonda sulle modalità con le quali dette formazioni sono disposte e raggruppate nei singoli parassiti. Sappiamo oramai che in ciò non vi sono leggi costanti, così che, ad es., si possono nella stessa sezione di tessuto, talvolta in una medesima cellula nervosa, incontrare microrganismi, alcuni dei quali presentano una sola grossa formazione poco rifrangente, granulosa, di solito in posizione centrale o spostata alla periferia, e intorno ad essa i corpicciuoli piccoli, rifrangenti, in numero vario a seconda delle dimensioni del protozoo: accanto a questi se ne trovano altri che, invece di una sola grossa formazione centrale, ne contengono due, tre, quattro, anche di più, in posizione varia; altri infine fittamente ripieni di corpicciuoli piccoli, rotondeggianti, di grandezza quasi uniforme; fra tali tipi tutta una serie di forme di passaggio, che rende impossibile ogni descrizione schematica (1).

(1) Cfr. la fig. 6, tav. I della mia prima comunicazione: *Contributo alla studio del-*

Nell'ultima Nota ho comunicato che in ognuna delle formazioni interne si possono mettere in evidenza dei corpicciuoli, degli ammassi di sostanza che si colora elettivamente con colori nucleari, l'ematossilina ad es., ed ho descritto inoltre alcuni degli aspetti con i quali questa sostanza può presentarsi.

Più precisamente, ho fatto notare, ed ho cercato anche di riprodurre in figure, che « nelle più grosse formazioni, colorando con l'ematossilina e con particolari modalità, ora si riscontra un corpicciuolo intensamente colorato e d'aspetto omogeneo; altre volte si ha un ammasso di sostanza riunita in blocchi o filamenti strettamente ravvicinati fra loro . . . rapporti che passando in altri parassiti si vanno facendo meno intimi, così che la distinzione delle masse cromatiche si rende sempre più manifesta; si arriva infine a forme nelle quali si trovano dei filamenti bene individualizzati e riuniti in modo vario tra di loro, che occupano la maggior parte della formazione che li contiene ».

A questi varî aspetti limitai la mia descrizione; aggiunsi però che tutto mi portava a ritenere che dovessero esistere ulteriori e più complesse modificazioni di questi corpicciuoli cromatici, ai quali, per le loro caratteristiche di forma, per le modificazioni che presentavano e per le loro proprietà chimiche, io fin d'allora diedi il significato di nuclei o di sostanza nucleare o di sostanza cromatica.

Per la grande importanza che assumevano tali reperti in favore dell'ipotesi della natura parassitaria dei corpi endocellulari specifici della rabbia, opinione che ho sempre sostenuto, io mi decisi a renderli noti, sebbene fossero ancora incompleti: a ciò fui indotto anche dal fatto di aver potuto riscontrare altri stadi del parassita, oltre a quelli comunemente noti, stadi che dimostrano un ciclo evolutivo e che confermano che ci si trova veramente di fronte ad un essere vivente.

Questi stadi io li avevo trovati nelle solite sedi di predilezione del microrganismo (corteccia, corno d'Ammone), in tre bovini morti di rabbia, in uno in modo particolare molto abbondanti; per la loro fine struttura si differenziavano in modo assai netto dalle solite forme del parassita. Infatti non presentavano più nel loro interno le formazioni bene individualizzate, rifrangenti o granulose, di grandezza varia, che sono caratteristiche delle comuni forme parassitarie; apparivano invece finamente granulosi per la presenza di piccolissimi corpicciuoli rifrangenti, alcuni allungati, che riempivano fittamente tutto il corpo del protozoo.

Abbondanti nel corno d'Ammone, tali stadi erano numerosi anche nelle cellule nervose della corteccia cerebrale, specialmente in uno degli animali,

---

l'eziologia della rabbia. Boll. Soc. Med. Chir. Pavia, 1903, n. 2, e Zeitsch. f. Hyg., Bd. XLIII, nella quale sono riprodotti alcuni dei modi di presentarsi del parassita osservato a fresco.

e con caratteri che in tutti si potevano dire eguali, fatta eccezione di qualche differenza nei contorni del corpo del microrganismo, ora netti, ora irregolari, un po' frastagliati.

Con l'ematossilina ferrica io potei differenziare in modo più fino le minute particolarità di queste forme e ottenere colorati dei piccoli corpicciuoli, di lunghezza una frazione di μ, di forma allungata, di rado diritti, di solito ricurvi, talora di aspetto omogeneo, più spesso contenenti granuli, rigonfiamenti...

Su questi corpicciuoli si fermò in modo speciale la mia attenzione, ed io li interpretai, in modo molto largo, come le spore del parassita, e cercai anche di riprodurli nelle figure (1). Non tralasciai però di ricordare che accanto a questi parassiti costituiti dall'accumulo di corpicciuoli allungati, nelle medesime sezioni colorate coll'ematossilina ferrica, se ne incontravano altri risultanti invece dall'insieme di finissimi granuli.

Ma su queste più minute particolarità non reputai opportuno d'insistere, proponendomi di continuare le mie ricerche.

Oggetto della presente Nota è una serie di reperti ancora sulla struttura e sul ciclo del parassita, che in parte confermano quanto ho già descritto, in parte aggiungono fatti nuovi, e che sono appunto il frutto delle mie ulteriori, insistenti e faticose ricerche.

Dirò subito che i fatti che verrò esponendo non si riferiscono più al microrganismo studiato, con procedimenti di tecnica varî, nelle sezioni di pezzi di tessuto nervoso inclusi in paraffina. Tale metodo, che pure è stato così fecondo di risultati da altri punti di vista, per lo studio dell'intima struttura del protozoo e del suo ciclo vitale, sebbene non sia del tutto da abbandonarsi, — e quanto ho già ottenuto credo ne stia a prova — tuttavia si dimostra assai inferiore ad un altro procedimento che di inarrivabile sussidio è stato nello studio di molti protozoi, e che, fino ad un certo punto, si potrebbe dire specifico per questi esseri, la colorazione cioè del Romanowsky sui preparati per strisciamento di materiale contenente il parassita.

Al metodo del Romanowsky io ho ricorso già da tempo, ma per un lungo periodo non ho ottenuto immagini chiare, concrete, che meritassero di essere descritte. Frattanto è stato al medesimo scopo applicato da altri osservatori (2), ma giudicando dalle descrizioni e dalle figure, si riporta l'impres-

(1) Cfr. le figg. 13 e 14 della mia ultima Nota.

(2) Cfr. tra gli altri: Wessels Williams e Murray Lowden, *The etiology and diagnosis of hydrophobia*. Journal of Infectious Diseases, vol. III, n. 3, 1906. Questi Autori applicando la colorazione del Romanowsky sul parassita, confermano in esso l'esistenza di masse cromatiche. Sulla classificazione che essi fanno di queste masse, come pure sulle forme parassitarie che essi interpretano come forme di divisione e forme di coniugazione, io non ho elementi sufficienti per pronunciare un giudizio. D'altra parte i risultati che verrò esponendo non concordano perfettamente con quelli dei due egregi osservatori.

sione che anche i loro risultati siano di gran lunga meno completi di quelli che, in possesso della tecnica e con materiale adatto, io ho ottenuto negli ultimi mesi.

Senza fermarmi sulle modalità seguite, che nulla presentano di particolare, passo alla descrizione dei reperti, reperti che ho cercato di documentare con una serie di fotografie. Per il momento, mi riferisco solo a quei fatti che ritengo risultino dalle figure in modo indiscutibile: anche ora incomincerò dalle forme parassitarie meglio conosciute, per venire poi a quelle che gli studî più recenti hanno messo in evidenza.

Nei preparati per strisciamento colorati col metodo di Romanowsky, nel maggior numero delle comuni forme parassitarie, i contorni delle formazioni interne, anche a fresco tanto netti ed evidenti, sono scomparsi ovvero pochissimo distinti.

La massa fondamentale del microrganismo assume, a seconda dei casi, ora una delicata colorazione azzurra, ora un azzurro violaceo più marcato, ora un tono azzurro-roseo; solo le più grosse formazioni interne, e non sempre neppur esse, si possono intravedere. Sul fondo del microrganismo spiccano evidenti, a differenziazione ben riuscita, le masse nucleari di solito intensamente colorate, in azzurro cupo, in azzurro violaceo, in viola rossastro. Il loro modo di comportarsi di fronte al metodo è nuova conferma che si debbono realmente considerare come i nuclei, le masse nucleari del parassita: d'ora in poi li indicherò senz'altro con tale denominazione.

Le masse nucleari, nei singoli parassiti in numero vario, corrispondente al numero delle formazioni interne nelle quali, come vedremo, ogni nucleo è racchiuso, presentano differenze notevoli nelle loro dimensioni e nel loro aspetto.

Nella fig. 1 ad es., io ho cercato di riprodurre un parassita che contiene un grosso corpo centrale intensamente colorato e in apparenza omogeneo; attorno ad esso sono disposti numerosi ammassi nucleari più piccoli, di forma abbastanza regolare, di aspetto pure omogeneo e circondato ognuno da un alone incoloro, a contorni relativamente netti.

Nella fig. 2 invece, in luogo di un unico grosso ammasso centrale, nell'interno del parassita si vedono parecchi corpi più piccoli, di dimensioni varie e distribuiti in modo irregolare, anch'essi in apparenza omogenei.

L'aspetto uniforme, compatto — anche ora mi riferisco in modo speciale ai più grossi ammassi cromatici — scompare nelle successive fig. 3, 4 e 5.

Nel parassita rappresentato nella fig. 3, l'ammasso nucleare di maggiori dimensioni è a contorni irregolari, frastagliati; in esso l'osservazione microscopica fa accertare che la sostanza cromatica è divisa in parti più piccole, ravvicinate fra loro, con tendenza a disporsi in filamenti, filamenti che credo siano ancora più evidenti, per lo meno in qualche punto, nella massa nucleare centrale della fig. 4.

La fig. 5 infine riproduce un parassita che contiene differenziate parecchie formazioni di diametro vario: in alcune si intravede che la cromatina accenna a riunirsi in corpicciuoli bene individualizzati.

Disposizione questa assai più evidente nelle fig. 6, 7, 8, in tre parassiti diversi per forma e per dimensioni e contenenti ciascuno una grossa formazione centrale, che appare nella fotografia come una macchia più oscura sul fondo del corpo del protozoo. Tale formazione in ogni singolo parassita contiene parecchi ammassi cromatici, nettamente differenziati e distinti, rotondeggianti od ovali, di grandezza quasi uniforme, di poco superiore ovvero uguale a quella dei piccoli ammassi nucleari che attorno alla grossa formazione sono disposti; da questi ultimi in qualche caso non è possibile distinguerli, nè per la forma, nè per l'aspetto, nè per il modo di comportarsi di fronte al metodo di colorazione.

I grossi nuclei che con diversi aspetti si osservano nelle figure fin qui illustrate, più non si ritrovano in altre forme. Di esse non posso per il momento che presentarne una sola, che non è di certo una delle più chiare che si possono incontrare.

Nel parassita della fig. 9 infatti, anche esaminando con cura il preparato, inutilmente si ricercherebbero i grossi ammassi di sostanza omogenea, colorati elettivamente dal metodo del Romanowsky, ovvero gli ammassi filamentosi, ovvero l'elegante distribuzione delle figg. 6, 7, 8. Il protozoo è fittamente ripieno di una grande quantità di corpi colorati, alcuni assai piccoli, rotondeggianti, circondati da un alone incoloro, distribuiti in prevalenza nella porzione più periferica; altri un po' più grandi, riuniti al centro, di aspetto e di forma irregolare, di grandezza diversa: la fotografia può servire a dimostrare in modo grossolano questo reperto.

Oltre alle particolarità, che per sommi capi ho descritto e che probabilmente corrispondono solo a qualcuno degli aspetti che le più comuni forme del parassita possono presentare, il metodo del Romanowsky, eseguito in modo opportuno, dimostra l'esistenza di ulteriori stadi e ne rivela la più minuta struttura, confermando nei punti principali quanto ho già reso noto.

Io non starò a ripetere come questi ulteriori stadi — che oramai ho con frequenza riscontrato in molti animali e di specie diverse — si presentino nelle sezioni con i vari metodi. Ricordo solo che all'esame a fresco anche l'occhio più esercitato di rado e con grande fatica li può riconoscere, poichè si tratta quasi sempre di corpi pallidissimi, incolori, finamente granulosi, a contorni delicati, che facilmente si sottraggono all'osservazione, anche per la natura del tessuto nel quale si localizzano.

Con il procedimento del Romanowsky queste forme spesso si differenziano con insuperabile chiarezza: si può allora rilevare, come dimostrano — per quanto è possibile con la fotografia — le figure 10 e 11 che esse ri-

sultano di una grande quantità di corpicciuoli i quali nel loro insieme costituiscono tutto il parassita.

Tali corpicciuoli assumono una spiccata colorazione azzurra, misurano frazioni di micromillimetro, sono ravvicinati tra loro, circondati ognuno da un esile alone incoloro che sembra talvolta abbia limiti ben definiti. I più piccoli di questi corpicciuoli hanno forma di granuli rotondeggianti e sono di grandezza quasi uniforme; di rado accanto ad essi ho ritrovato granuli di un certo volume, come nel parassita della fig. 10; più di frequente si riscontrano invece altri corpicciuoli pure assai piccoli ma di forma ovalare, alquanto allungata; si trovano infine anche esili filamenti, ora omogenei, più di sovente granulosi, di lunghezza varia e più o meno diritti o ricurvi.

Dall'insieme di questi corpicciuoli, come ho detto, risulta il parassita, i cui contorni, anche con questo metodo, non appariscono sempre nello stesso modo; in alcuni casi sono ancora regolari e manifesti, in altri casi meno netti, alquanto frastagliati.

Entrare in più minuti particolari è questione troppo ardua per l'estrema piccolezza delle immagini ed io non mi sento di poterla per ora affrontare.

Tanto più credo convenga procedere con ogni riserbo, in quanto non è infrequente nei preparati per strisciamento di sostanza nervosa di incontrare ammassi di granuli, che non sono di certo da riferirsi al microrganismo, e che possono presentare qualche punto di contatto con gli stadi ora accennati. Per la loro forma, per i loro contorni, per i diametri dei granuli di solito minutissimi e di grandezza quasi uniforme, per l'insieme di tutti questi caratteri, tali ammassi, che si riscontrano anche negli animali sani, si differenziano però in modo evidente dalle tipiche forme del parassita che ho ricordato e alle quali pertanto limito la mia descrizione.

Con questi pochi cenni il mio compito sarebbe esaurito, perchè, come ho detto, il mio scopo per ora è quello di richiamare l'attenzione sopra una nuova serie di reperti che confermano e vengono ad aggiungersi a quelli già conosciuti.

Nel parassita, nelle sezioni, io avevo infatti messo in evidenza, nelle più grosse formazioni interne in modo speciale, masse nucleari, ora in forma di corpi omogenei, ora di ammassi irregolari di cromatina ravvicinati fra loro, ora di filamenti bene individualizzati. Il metodo del Romanowsky — ed in modo molto più chiaro — differenzia pure simili ammassi, e anche questi, alla loro volta, si presentano o come corpi omogenei o come irregolari ammassi di cromatina ravvicinati fra loro, ovvero come filamenti (cfr. per questo aspetto la fig. 4, sebbene non siano i preparati per striscio i più adatti per lasciar riconoscere tale particolarità).

Che le immagini, che in modo quasi uguale sono messe in rilievo dai diversi metodi, siano l'espressione degli stessi fatti, io lo metterei fuori di dubbio.

Negli strisci invero i contorni delle formazioni interne del parassita sono di solito poco distinti; per questa ragione spesso è difficile stabilire con precisione i rapporti topografici tra i nuclei e le caratteristiche formazioni del protozoo: il rapporto però è dimostrato dal medesimo metodo di colorazione allorquando, anzichè sui preparati per strisciamento, viene applicato sulle sezioni di tessuto.

Per quanto di riuscita incostante ed inferiore in chiarezza a quella che si ottiene dal materiale trattato nel modo classico, la differenziazione del parassita con la colorazione del Romanowsky ha luogo talvolta anche nelle sezioni: è allora agevole stabilire la sede delle singole masse nucleari, che è appunto nell'interno delle caratteristiche formazioni del parassita, i cui contorni in questi preparati pure appariscono con evidenza.

Dalla colorazione del Romanowsky sulle sezioni si ottengono in tal modo reperti che da un lato trovano riscontro con quelli che dà l'ematossilina pure sulle sezioni, da un altro lato con quelli che con lo stesso procedimento si hanno negli strisci: i risultati dei diversi metodi si corrispondono e si completano tra di loro.

Tale esatta concordanza nei risultati di metodi di ricerca tanto diversi, dei quali uno così perfetto, è la miglior conferma — a mio giudizio — che ci troviamo di fronte a vere strutture, che si ripetono con leggi costanti, quali non possono essere presentate che da un essere vivente.

Il metodo del Romanowsky, procedendo nell'esame comparativo, conferma inoltre un altro fatto di capitale importanza che pure da tempo io ho reso noto: l'esistenza cioè di ulteriori stadi del parassita. Questi stadi che ho oramai ripetutamente trovato, presentano una struttura che nelle linee generali corrisponde a quella che in tali forme, con altra colorazione, ho da tempo descritto: sono ammassi di corpicciuoli piccolissimi, di forma varia, che nel loro insieme costituiscono tutto il corpo del microrganismo.

Passando ai più minuti particolari, devo riconoscere che dai preparati colorati coll'ematossilina ferrica io avevo riportato l'impressione che l'ultimo stadio del parassita fosse segnato dalla formazione di piccoli corpicciuoli alquanto allungati, a semiluna, a virgola, che in tali preparati si vedevano in molti casi numerosi ed evidenti: tuttavia accennai che i corpicciuoli avevano spesso un aspetto granuloso, aspetto che cercai di riprodurre nelle figure.

Il procedimento del Romanowsky, con finissime differenziazioni, indurrebbe ora a ritenere che l'ultimo prodotto della divisione del parassita sia rappresentato da forme ancor più piccole, con ogni probabilità dai granuli ovali o rotondeggianti, ognuno dei quali si vede circondato da un esile alone incoloro.

In quale relazione stiano i granuli, che anche nelle sezioni io talvolta avevo veduti riuniti a costituire tutto un microrganismo, con i corpicciuoli

messi in evidenza dall'ematossilina ferrica, su cui in modo speciale mi ero soffermato, io non potrei per ora stabilire con esattezza. Io non posso escludere che questi ultimi siano eventualmente l'effetto di differenziazione incompleta, ipotesi verosimile se si tien conto della natura del metodo e della tendenza che hanno i piccoli granuli a disporsi in serie; ma non posso neppure escludere che rappresentino i corpicciuoli allungati, di aspetto omogeneo ovvero granuloso, che anche il procedimento del Romanowsky differenzia accanto ai granuli, spesso nel medesimo parassita. I corpicciuoli colorati coll'ematossilina ferrica potrebbero infine essere l'espressione di un'avanzata suddivisione della cromatina del protozoo in piccole masse destinate a dividersi ulteriormente, ipotesi pure da tener presente, in quanto anche negli strisci si può incontrare un aspetto simile, come dimostra il parassita della fig. 12, il quale è colorato col metodo del Romanowsky e che a prima vista si potrebbe dire l'immagine fotografica di una delle mie figure già pubblicate.

L'aspetto assunto da questo parassita corrisponde però a vera struttura oppure è a sua volta l'effetto di colorazione incompleta? Il fatto di aver riscontrato una sola volta questo reperto mi impone per il momento il più stretto riserbo.

Ma forse non è ora il caso di insistere su queste finissime particolarità, nel giudicare delle quali, e per la estrema piccolezza delle immagini, e perchè si tratta di fatti che non si possono ancora ben collegare tra loro, tanta parte ha il criterio soggettivo.

Riassumendo, sulla base dei fatti accertati, sebbene, ripeto, siano ancora molto scarsi, io ritengo si possa formulare la conclusione che *i corpi endocellulari specifici dell'infezione rabica rappresentano diverse forme di un protozoo che lascia intravedere un complesso ciclo evolutivo, nel cui ultimo stadio si ha la formazione di spore, in modo analogo a quanto succede in altri protozoi.*

Le spore sono di dimensioni minime, tanto che non ne ho potuto finora determinare con esattezza la struttura; si potrebbero però per il momento concepire come costituite da un piccolo ammasso di cromatina che si differenzia nettamente col metodo del Romanowsky, circondato forse da un esilissimo anello protoplasmatico; i loro diametri sono tali che ben si comprende perchè isolate non siano più riconoscibili e come possano attraversare le candele porose.

Determinare, sia pure a grandi linee, le diverse fasi del ciclo evolutivo, alla cui conoscenza è subordinata la posizione sistematica del microrganismo, è forse ancora prematuro.

Malgrado ciò, io non posso trattenermi dal richiamare l'attenzione su qualche fatto che potrebbe indicare la via per giungere alla soluzione del difficile problema.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Mi riferisco al modo di presentarsi delle masse nucleari delle più grosse formazioni interne del parassita. Tali masse, dapprima compatte, omogenee, attraverso fasi diverse, che con ogni probabilità si susseguono nell'ordine col quale le ho esposte, vanno incontro ad un processo di divisione: da un unico ammasso primitivo risulta infine una notevole quantità di blocchetti di cromatina bene individualizzati, distinti fra loro, ma ancora racchiusi nella formazione dalla quale hanno preso origine (cfr. dalla fig. 1 alla fig. 8).

Da una serie di altri reperti, io sarei indotto a ritenere che a questa fase un'altra ne segua, in cui i singoli ammassi nucleari originati dalla massa primitiva diventano a loro volta il nucleo di singole formazioni più piccole, bene individualizzate, che riempiono fittamente la formazione madre, con caratteri simili a quelle formazioni di dimensioni minori che le sono attorno disposte. Di questo stadio così importante, io ho avuto dei chiari accenni, ma non ho ancora ottenuto immagini che lo dimostrino in modo indiscutibile e che possano, come le precedenti, venire riprodotte: mi limito di conseguenza ad enunciarlo come molto probabile.

Se ciò realmente si verificasse, tenendo conto che anche nelle più piccole forme del parassita una massa nucleare è sempre ben manifesta, non potrebbe questa modalità di divisione spiegare, almeno in parte, la genesi ed i rapporti che verosimilmente esistono tra le diverse categorie di formazioni interne del microrganismo?

Il richiamo a processi che sono descritti in altri protozoi e che offrono molti punti di contatto con le modalità che ho ricordato, verrebbe qui spontaneo; ma ciò mi farebbe sconfinare dalla linea di condotta che per ora mi sono proposto, quella cioè di attenermi solo ai fatti.

Su di essi quindi mi soffermo, nella speranza di poterli aumentare con altre ricerche.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(v. la tavola annessa).

Tutti i parassiti vennero fotografati coll'obbiettivo apocr. Zeiss 2 mm. apert. 1,40, oculare di proiezione 4; ingrandimento 1100 diametri circa.

Le immagini sono tolte da preparati per strisciamento di sostanza nervosa del corno d'Ammone di animali idrofobi, ad eccezione della fig. 8 che si riferisce ad un preparato di corteccia cerebrale.

Metodo di colorazione del Romanowsky.

I parassiti delle figg. 3, 5, 9, 11, 12, provengono da cani; gli altri da bovini morti di rabbia. Nessun ritocco è stato fatto alle fotografie.

Chimica fisica. — *Azioni ottiche di gruppi atomici non saturi in immediata vicinanza.* Nota del Socio R. Nasini.

Non è mia abitudine far questioni di priorità, nè sono solito a reagire quando vedo che altri dicono quello che io aveva detto, riportano e utilizzano le mie esperienze senza nemmeno accennare al mio nome. La scienza cammina ugualmente e questi reclami non hanno grande interesse se non per chi fa la storia dell'argomento e chi fa la storia, se è coscienzioso, ricerca accuratamente, si abbevera alle fonti e mette le cose al suo posto. Ma quello che ha fatto adesso il prof. Brühl pubblicando due Note [1] che hanno il titolo che, io, tradotto, ho dato a questa mia, mi pare veramente che passi un poco i limiti o della non conoscenza dell'argomento o del partito preso, e mi costringe a mettere da me le cose al posto. Ho sempre lasciato correre quando il sig. Brühl, essendo costretto a fare della letteratura in pubblicazioni riguardanti la spettrochimica e, non potendo fare a meno di parlare dei lavori precedenti, allorchè si trattava dei miei procedeva in questo modo: citava tutti e poi ci metteva « u. A. » (e altri) e nella massima parte dei casi quell' » u. A. », voleva significare il solo mio nome! Una volta [2] misi in rilievo la cosa perchè mi parve — psicologicamente — assai interessante; e nient'altro!

Nella prima delle sue Note il Brühl afferma prima di tutto avere egli messo in rilievo che i composti che non seguivano le sue regole — e che non le seguissero lo dimostrai io per il primo [3] — erano dotati di alta disper-

[1] J. W. Brühl, *Die optische Wirkungen aneinder stossender (konjugirter) ungesättigter Atomgruppen.* Berl. Ber. XL, 878 e 1153, marzo 1907.

[2] R. Nasini, *A proposito di un recente trattato sulle relazioni tra il potere rifrangente e la composizione chimica dei corpi.* Atti R. Istit. Veneto, t. LIX, p. II, pag. 211, anno acc. 1899-900. Il trattato a cui si allude è quello del Rimbach.

[3] Il Brühl non aveva dato nessun valore alle esperienze precedenti del Gladstone e aveva nettamente previsto che l'incremento della rifrazione molecolare nella naftalina e nei suoi derivati doveva corrispondere a 5 doppi legami, nell'antracene e nel fenantrene a 10 e così via: cito testualmente.

Es mag hier hervorgehoben werden, dass diese Hypothese mit den Beobachtungen von Gladstone in offenbarem Widerspruch steht, denn er fand für die Molecularrefraction kohlenstoffreicher Substanzen folgende Werthe.

			Molecular refraction Normale	
Paraffine	C_nH_{2n+2}		»	
Olefine	»	$-H_2$	»	
Terpene	»	$-3H_2$	»	$+3$
Aromatische Kohlenwasserstoffe	»	$-4H_2$	»	$+6$
Naphtalin	»	$-7H_2$	»	$+14$
Anthracen	»	$-10H_2$	»	$+17$

sione. Questo non è vero perchè l'aveva già constatato il Gladstone, e l'aveva constatato io misurando la dispersione, proprio in quei lavori che dettero tanta noia al prof. Brühl.

Allora il sig. Brühl diceva che la dispersione non stava in nessun rapporto nè col potere rifrangente delle sostanze nè colla loro costituzione chimica (1). Ma poco male! Afferma poi il Brühl che pochi anni dopo l'Eykman dimostrò che i composti del tipo del cinnamano acquistano la rifrazione normale non solo per riduzione della catena laterale, ma anche quando il legame etenoide dalla posizione Δ_1 passa a quella Δ_2. Ciò è falso assolutamente, cioè è falso che l'Eykman pel primo abbia scoperto questo fatto. Le cose stanno così.

Nel 1885 io, per sottoporre a una prova sperimentale l'ipotesi del Gladstone sopra il valore più elevato della rifrazione atomica del carbonio, preparai composti isomeri dei due tipi, vale a dire gli uni in cui il doppio legame fosse in immediata vicinanza al nucleo benzolico, gli altri in cui forse unito per mezzo di CH_2 o di ossigeno e così via: confrontai fra gli altri composti l'alcool cinnamico con il fenato di allile, l'anetolo col paracresolato di allile e poi mi preparai il fenilbutilene $C_6H_5 . CH_2 CH = CH . CH_2$ e lo studiai otticamente. L'Eykman non pubblicò il suo lavoro che nel 1889, e poichè dei miei lavori comparvero dei sunti anche in tedesco, la non conoscenza di questo fatto non è in nessun modo giustificata per parte

---

Während nach den obigen Betrachtungen die Molecularrefraction dieser Körper sein müsste

			Molecular refraction	
Paraffine	C_nH_{2n+2}		Normale	
Olefine	»	$-H_2$	»	$+2$
Terpene	»	$-3H_2$	»	$+4$
Aromatische Kohlenwasserstoffe	»	$-4H_2$	»	$+6$
Naphtalin	»	$-7H_2$	»	$+10$
Anthracen	»	$-10H_2$	»	$+12$

Die von Gladstone angegebenen Zahlen für die Molecularrefraction der Kohlenstoffreichen Körper sind indessen, wie er selbst bemerkt, nur rohe Durchschnittswerthe » *Die chemischen Constitution organischer Körper in Beziehung zu deren Dichte und ihrem Vermögen das Licht fortzupflanzen* von J. W. Brühl, Liebig's Annalen Bd. *200*, 139, anno 1880.

(1) « Die von verschiedener Körpern bewrikte Farbenzerstreuungen steht in keinem zur Zeit deutlich erkennbaren und zahlenmässig ausdrukbaren Zusammenhange weder mit der von ihnen ausgeübten Lichtbrechung noch auch mit der chemischen Natur der Substanzen. *Untersuchungen über die Molekularrefraction organische flüssiger Körper von grossen Farbenzerstreungsvermögen* von J. W. Brühl. Liebig's Ann. *235*, 104, anno 1886. Notisi che il Gladstone aveva già determinato gli equivalenti di dispersione ed io aveva messo in rilievo la grande importanza di questa proprietà, sulla quale poi, ricredutosi, il Brühl pubblicò interessanti lavori.

di chi si occupa da tanto tempo della materia e che la letteratura dovrebbe conoscere.

Ma c'è qualche cosa di più interessante per la storia dell'argomento.

Dopo avere scoperta io l'azione ottica del doppio legame in immediato contatto col nucleo benzolico, concludeva: « Da tutti questi fatti sembra che si possa con qualche certezza concludere che l'unione di una catena non satura al nucleo del benzolo fa aumentare notevolmente la rifrazione e la dispersione quando tale unione avviene per l'atomo di carbonio non saturo; quando invece il gruppo laterale si salda al fenile per un atomo di carbonio saturo o per l'ossigeno, non si nota aumento alcuno: la rifrazione del composto è la somma delle rifrazioni componenti »! E in conformità di questo modo di vedere dava ragione della rifrazione così elevata dei composti naftalici e metteva in evidenza la natura di questo aumento, che si manifesta quando si uniscono insieme due gruppi dotati di forte potere rifrangente.

Il prof. Brühl (che allora mi citava col mio nome), a proposito di questo mio modo di vedere, diceva, che io cercava di render conto del comportamento ottico dei derivati della naftalina e degli altri in modo strano e stiracchiato (1).

Chi avrebbe dello al prof. Brühl che poi egli avrebbe dovuto, oltre che far tanti elogi al Eykman, che non fece che estendere le ricerche ed applicare il fatto da me scoperto, scrivere anche nel 1907 una Memoria per dimostrare e elevare anzi all'onore di legge quello che io aveva già dimostrato nel 1885! Vicende della scienza!

Seguono le constatazioni interessanti.

Studiando il potere rifrangente dei solfocianati e degli isosolfocianati insieme col mio allievo A. Scala (2), trovammo, per l'isosolfocianato fenilico una enorme rifrazione e dispersione, che superava di assai la somma delle rifrazioni del gruppo fenile e del residuo dell'acido isosolfocianico. Così ci esprimemmo: « In questa combinazione l'unione del gruppo $S = C = N$ dotato di forte potere rifrangente, col gruppo fenilico, pure molto rifrangente, produce diremo così, un esaltamento della rifrangibilità; questo fenomeno è assai analogo all'altro, messo in rilievo da uno di noi, dell'aumento di rifrazione quando al gruppo benzilico si unisce una catena laterale non satura e per un atomo di carbonio non saturo ». E così proprio io introdussi nella scienza, in queste considerazioni di chimica ottica, il concetto e proprio

(1) « R. Nasini versucht die bei den Naftalinverbindungen, den Anethol u. s. w. auftretenden bedeutenden Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Molekularbrechung in einer sonderbaren und wie mir scheint sehr gezwungene Weise zu erklären ». Brühl, Liebig's Annalen, Bd. CCXXXV, pag. 56; anno 1886.

(2) R. Nasini e A. Scala, *Sulla rifrazione molecolare dei solfocianati, degli isosolfocianati e del trifone*, Rend. R. Acc. Lincei, Anno 1886, pag. 617.

anche la parola di esaltazione o esaltamento per l'unione dei due gruppi: concetto e parola che poi ho invocato in molti, moltissimi casi e di cui largamente hanno fatto uso i miei scolari.

Ecco ora le conclusioni generali del sig. Brühl e quelle particolari riguardo ai derivati del benzolo. Rimando alla sua Nota per la nomenclatura speciale a cui gli si attiene.

« 1. Legge fondamentale dei gruppi non saturi isolati. *Tutte quelle combinazioni nelle quali ci sono gruppi atomici non saturi, qualunque sia la loro natura e il loro numero, quando questi gruppi sono isolati, cioè non uniti direttamente con un altro complesso non saturo, possiedono rifrazione normale e anche presso a poco dispersione normale.*

« 2. Legge fondamentale della coniugazione. *Le combinazioni nelle quali sono contenuti gruppi non saturi direttamente uniti danno luogo ad esaltazioni nella rifrazione e ancora in più alto grado nella dispersione* ».

Debbo notare che la prima legge non è che il riconoscimento del fatto su cui si basa tutto il capitolo del potere rifrangente, cioè che spesso la rifrazione e la dispersione si comportano come proprietà additive: la seconda non è che il fatto sul quale io e lo Scala richiamammo l'attenzione e che poi fu messo in evidenza, confermato e discusso in moltissimi lavori miei e dei miei scolari. Solo che io non ne aveva fatto una legge, per non dover trovare quelle eccezioni che danno tanta noia al prof. Brühl. Egli invece non si sgomenta e ne fa delle altre leggi che contraddicono quelle già stabilite, come vedremo a proposito della sua 2ª Nota!

« Prima legge speciale sulla coniugazione neutra nelle combinazioni aromatiche. *In tutti i derivati aromatici, nei quali gli atomi di carbonio del nucleo sono uniti direttamente solo con atomi monovalenti o con gruppi atomici saturi, del rimanente le catene laterali possono anche — in posizioni lontane — contenere complessi non saturi, i tre legami etenoidi del benzolo si trovano in stato neutro coniugato, nel quale spettrochimicamente non differiscono dai legami etnoidi isolati.*

« Seconda legge speciale sulla coniugazione attuale nelle combinazioni aromatiche. *Composti aromatici, nei quali uno o più atomi di carbonio del nucleo sono uniti direttamente con gruppi atomici non saturi, e anche tutti i derivati nei quali l'uguaglianza dei sei atomi di carbonio del nucleo in seguito ad una qualunque speciale modificazione non sussiste più, danno luogo ad esaltazione ottica, la cui entità dipende dalla natura e dal numero dei gruppi attualmente coniugati.*

E porta ad esempio i derivati del cinnamarno, della naftalina, del fenantrene ecc., e nella letteratura si trovano citati tutti quelli che hanno lavorato sull'argomento, eccettuato me che ci ho lavorato più di tutti!

Io sono molto grato al prof. Brühl di diffondere così le mie vedute sull'esaltazione che ha luogo quando due gruppi molto rifrangenti e dispersivi si uniscono insieme; sono anche assai lieto che abbia preso il nome da me introdotto, quello di esaltamento o esaltazione (1). Io ho a lungo parlato dell'interesse che si presentava a considerare le cose sotto questo punto di vista, e sull'argomento molto ho insistito io e ci hanno insistito i miei scolari; cito tra gli altri il lavoro dello Zecchini sulle ammine feniliche, nel quale constatò notevole aumento per ogni ulteriore introduzione del gruppo fenilico; quelli dello Zoppellari sul selenio, del Chilesotti e del Pellini sopra le combinazioni aromatiche a più nuclei. Io anzi così mi espressi nel 1899 (2): « Questo fatto merita assai di essere studiato; potrebbe darsi che l'aumento o esaltamento nel potere rifrangente fosse una funzione più o meno complicata dei gruppi che si uniscono o della sua differenza: il potere stabilire una tale funzione sarebbe a mio credere uno dei risultati più importanti che si potessero sperare in questo campo »,

Mette in rilievo anche il Brühl l'interesse di simili ricerche per poter calcolare *a priori*, prevedere esattamente la rifrazione e la dispersione molecolare per ogni caso strutturale. « È un compito molto laborioso, egli dice, ma anche molto importante e che promette una sicura riuscita, ma per tale compito le forze di un solo non possono bastare. Sarebbe quindi da augurarsi che anche altri lavoratori volessero rivolgersi a simili ricerche, più che sino a qui non sia stato fatto ».

Spero quindi che il Brühl sarà contento del contributo che io porto colle mie vecchie esperienze e colle mie antiche vedute, essendo con lui perfettamente d'accordo nel riconoscere l'importanza dell'argomento.

Nella seconda Nota il Brühl non cambia sistema quanto ai lavori miei. Premette queste considerazioni filosofiche: « il principio che la natura non opera mai secondo un unico schema, ma al contrario con la sua inesauribile varietà sempre offre sorprese e presenta nuovi problemi, si conferma anche qui. Ci sono cioè delle intere classi di sostanze nelle quali pur presentandosi la coniugazione di complessi non saturi, nondimeno, contro ogni previsione, non ha luogo esaltazione ottica ». E la seconda legge generale?

E questo prima di tutto lo mostra per composti in cui si accumulano i carbonili. A questo proposito il prof. Brühl sarà lieto di sapere che io

(1) Tanto più grato poi perchè il prof. Brühl non traduce, ma dice addirittura « Exaltation ». Io non sono profondo nella lingua tedesca, ma mi pare che quella « Exaltation » debba essere di assai difficile digestione. Si vede che il chiaro professore voleva mettere bene in evidenza l'origine latina — in questo caso italiana — della parola.

(2) R. Nasini, *A proposito di un recente trattato* ecc., loc. cit.

sino dal 1894 insieme col prof. Anderlini studiai la questione e giunsi a questo risultato (1).

« Dal nostro studio resta dimostrato che la sola presenza del gruppo CO od anche di più gruppi CO riuniti in catena aperta oppure in nucleo chiuso aromatico, non è di per sè sola causa sufficiente per un forte innalzamento nel potere rifrangente ».

Ma lasciamo correre, perchè quello che vien dopo è ancor più curioso!

Il Brühl intitola il § V: *Depressione ottica nei sistemi eterocicleni*, e, riferendosi al pirrolo, al tiofene e alla γ-coniceina, dice che si ha in questi casi un fatto altamente sorprendente, che questi corpi eterociclici non saturi si comportano sempre anormalmente. E precisamente si hanno in questi casi delle depressioni ottiche, la cui entità è diversa nelle diverse classi di corpi, ma in una stessa classe è approssimativamente costante. Dice che la dimostrazione di questo comportamento nei suoi particolari lo porterebbe troppo in lungo e si riserva di farlo in altra Memoria.

Certamente quest'altra Memoria sarà la benvenuta e benvenuti i nuovi contributi che il prof. Brühl porterà all'argomento, ma la questione è proprio stata esaurientemente trattata da me e dal Carrara in una Memoria (2) intitolata: *Sul potere rifrangente dell'ossigeno, dello zolfo e dell'azoto nei nuclei eterociclici*, Memoria di cui comparve anche un largo sunto in tedesco. In essa dimostrammo che per il furano, il tiofene, il pirrolo, il pirazolo si ha un indebolimento del valore ottico del doppio legame per effetto dell'entrata nel nucleo dell'elemento estraneo polivalente e venimmo a queste conclusioni, sulle quali richiamiamo l'attenzione tanto dei chimici fisici quanto dei chimici organici, tanto più che le idee svolte da me e dal Carrara possono trovare spiegazione nelle attuali vedute che vanno sviluppandosi sulla valenza e in quelle riguardanti il modo di essere dei nuclei organici, e alla loro volta possono queste nostre idee essere di qualche aiuto allo svolgimento, al completamento di quelle vedute stesse. Crediamo opportuno di riportare integralmente quello che allora dicemmo:

« La vicinanza di elementi estranei polivalenti ad atomi di carbonio doppiamente legati ha per effetto di indebolire l'energia ottica del doppio legame; quelli atomi di carbonio doppiamente legati tendono, diremo così, a distaccarsi per una valenza fra di loro e ad unirsi con l'elemento che può manifestare una maggiore capacità di saturazione. Ora il massimo aumento nel potere rifrangente si ha per quello stato speciale degli atomi di carbonio per cui due di essi, o contigui o facenti parte di un nucleo, si scambiano più di una valenza fra di loro, qualunque sia il concetto fisico che si vuole attribuire a questo fatto. Se in vicinanza vi sono degli elementi che potrebbero

(1) R. Nasini e F. Anderlini, *Sul potere rifrangente dei composti contenenti il carbonile*. Gazz. chim. ital., XXIV, parte I, pag. 157, 1894.

(2) Gazz. chim. ital., XXIV, parte I, pag. 256, 1894.

pure, in condizioni opportune, saturare con le loro valenze latenti quelle del carbonio, si comprende facilmente come l'energia, diremo così, del legame multiplo possa essere diminuita, perchè questa attrazione o irradiazione che un atomo di carbonio non esercitava prima che verso un altro, ora l'esercita anche verso l'elemento estraneo: si formano, è vero, dei legami multipli coll'elemento estraneo, ma questi sono ben lungi dal compensare l'effetto dovuto al doppio legame. Onde è che i composti eterociclici possono essere dal punto di vista chimico stabilissimi, giacchè quella tendenza a legami multipli del carbonio con elementi estranei non è ordinariamente causa di indebolimento chimico, mentre è senza dubbio causa di minore effetto ottico. In tutti i nuclei eterociclici noi abbiamo appunto elementi che possono manifestare una valenza superiore a quella che nelle ordinarie formule di struttura loro si attribuisce: i doppi legami tra carbonio e carbonio sussistono sempre, ma sono, se così può dirsi, più deboli sotto il punto di vista che a noi qui interessa, quello di fare aumentare il potere rifrangente e dispersivo ». E più oltre:

« Ci sembra che si accordi colla nostra ipotesi il fatto che se al nucleo benzolico si salda una catena laterale non satura si ha un aumento di rifrazione quando l'unione avviene per l'atomo di carbonio non saturo: non si ha aumento quando invece l'unione avviene per un atomo di carbonio saturo: dato il fatto generale che l'addensarsi nella molecola di atomi o gruppi dotati di forte potere rifrangente e dispersivo porta con sè un esaltamento nel potere rifrangente e dispersivo stesso, si comprende fino ad un certo punto come quando il nucleo benzolico si trova in immediato contatto con carbonio doppiamente legato, le valenze doppiamente legate che si trovano in esso non possono esercitare nessuna o soltanto piccola azione sul resto della catena laterale: avverrebbe qualche cosa di analogo a ciò che avviene quando una combinazione che tende a decomporsi si trova in presenza dei suoi prodotti di decomposizione; invece, quando ciò non si verifichi, quella irradiazione è possibile ed il consueto esaltamento non ha luogo.

« In conclusione, ci sembra che la diminuzione di potere rifrangente che si osserva nei nuclei eterociclici possa spiegarsi ammettendo che l'elemento estraneo polivalente, e che tende a manifestare la sua valenza massima, indebolisca l'energia ottica del doppio legame, il quale allora non esercita più sulla rifrazione la sua azione consueta e si hanno così per le rifrazioni molecolari trovate dei numeri minori che per le rifrazioni molecolari calcolate: tale azione sembra che gli elementi estranei la esercitino anche sui doppi legami in catena aperta » (1).

(1) Vedi Carrara, *Influenza degli alogeni sul valore ottico del doppio legame.* Gazz. chim., XXIII, parte II, pag. 1, 1893. Dice il Carrara, dopo aver constatato che spesso l'alogeno fa diminuire il valore ottico del doppio legame: « potrebbe darsi che nel modo stesso che l'unirsi direttamente fra loro di atomi di carbonio, o in generale di gruppi aventi

È inutile dire che il prof. Brühl anche per questi composti dovendo fare la letteratura dell'argomento, non cita mai il mio nome, anche quando, come pel tiofene e pel pirrolo, le prime determinazioni si debbano a me ed egli non abbia ripetuto le mie esperienze che alla distanza di molti anni. E siccome il furano non l'ho esaminato che io, così di questo interessantissimo composto egli non parla affatto, non ostante che avrebbe servito così bene ad illustrare la sua esposizione!

In un passaggio di colore oscuro (1) credo che il prof. Brühl voglia alludere a me quando dice, a proposito delle apparenti irregolarità che si riscontrano e che non sono che manifestazioni di peculiarità costitutive. « Fra le persone più specialmente interessate alle ricerche spettrochimiche si è completamente misconosciuto il significato di queste supposte irregolarità e si è tacciato di inadatto allo scopo il metodo di ricerca spettrochimica ». Un'altra volta il prof. Brühl mi accusò di discreditare coi miei lavori, non colle esperienze, perchè ammetteva (bontà sua!) che fossero fatte esattamente, ma colle mie critiche, tutto il campo della rifrazione! Veramente ora dovrebbe rendermi giustizia, giacchè, riepilogando e riferendomi a quello che egli dice: ho scoperto la differenza spettrochimica tra i composti propenilbenzolici e quelli allilbenzolici, scoperta a cui hanno tenuto dietro i lodati sviluppi dell'Eykman: ho scoperto l'azione dell'idrogenazione sui nuclei, azione che secondo il Brühl doveva essere progressiva, mentre invece procede saltuariamente quando si effettua sopra un nucleo congiunto ad un altro o su un doppio legame in immediata vicinanza del nucleo benzolico: ho scoperto sei delle leggi che in queste due Note il prof. Brühl enuncia e alle quali attribuisce tanta importanza. E se si esaminassero (consiglio il prof. Brühl a farlo) i lavori che, sotto la mia direzione, fecero nel mio Istituto di Padova i sigg. Chilesotti e Pellini, si troverebbe che molte altre conseguenze importanti rispetto ai nuclei condensati e ai nuclei eterociclici sono state messe in evidenza: specie in riguardo all'idrogenazione progressiva dei nuclei e all'effetto ottico che ne consegue.

Sono però lieto che a quelle conclusioni alle quali io era giunto da tanto tempo, e nelle quali mi trovava in ottima compagnia, specie in quelle dell'Ostwald, del Landolt e del Jahn, del Walden e di altri molti, giunga ora il sig. Brühl, che così conclude: « Cosicchè un solo schema generale per il comportamento ottico non si dovrà mai stabilire, come non è possibile formulare regole generalissime in riguardo alle proprietà e alle trasformazioni chimiche. In ambedue i casi i fenomeni che si presentano si possono riassumere in leggi solo limitatamente a determinate serie di corpi e per determinate peculiarità costitutive ».

Proprio quello che ho sostenuto io sino dal 1884!

---

già una elevata rifrazione, produce un esaltamento nel potere rifrangente, così l'unione degli alogeni che hanno piccola rifrazione specifica al carbonio non saturo fosse causa di diminuzione.

(1) Loc. cit., pag. 880.

Chimica. — *Azioni catalitiche dei metalli suddivisi sui composti azotati* (1). Nota di M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Azione del nickel ridotto sulla piridina e sulla piperidina. — In una Nota precedente (2), dimostrata la trasformazione della chinolina in metilchetolo per mezzo del nickel finamente suddiviso ed in presenza di idrogeno, si manifestava il proposito di tentare con lo stesso metodo analoghe trasformazioni di nuclei eterociclici azotati esatomici in nuclei pentatomici.

E per proseguire le ricerche in questo senso, cominciai a sperimentare anzitutto con la piridina. Senonchè questa sostanza si è mostrata assai resistente alla idrogenazione; operando nel solito modo non si riesce ad ottenere che delle traccie di basi secondarie (piperidina?) e piccole quantità di prodotto non basico che ha i caratteri dei pirroli, ma che per l'esigua quantità non potei finora identificare. Nè occorre dire che, più che l'idrogenazione della piridina a piperidina, interessava constatarne la trasformazione in un pirrolo.

Pensando che la piperidina presentasse una maggiore attitudine alle trasposizioni molecolari, la assoggettai in vario modo all'azione del nickel suddiviso, e ne ottenni vari prodotti, e cioè: 1) piridina, 2) prodotti di carattere pirrolico in maggiore quantità che nel caso della piridina, ma pur tuttavia ancora insufficienti per poterli identificare, 3) due basi complesse rispondenti alle formule $C_{10}H_{21}N$ e $C_{14}H_{28}N_2$.

Parte sperimentale.

Esperienze con piridina (3). — La piridina impiegata proveniva da Kahlbaum e bolliva tutta a 115-116°; venne fatta passare lentamente insieme a idrogeno sul nickel ridotto, a varie temperature (fra 180 e 250°). In tutte le esperienze eseguite si condensò un liquido costituito per la più gran parte da piridina inalterata. Da una porzione del liquido, riscaldata preventiva-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Padoa e Carughi, questi Rendiconti, 1906, II, 113.

(3) Mentre stavo correggendo le bozze di questa Nota, giunse a mia conoscenza il resoconto della seduta del 15 aprile u. s. dell'Accademia delle Scienze di Francia, dal quale risulta che Sabatier e Mailhe eseguirono esperienze di idrogenazione sulla piridina; poichè i risultati di questi autori si completano coi miei, io credo opportuno di dar corso integralmente alla mia Nota.

mente con un eccesso di acido cloridrico concentrato, per togliere di mezzo i prodotti pirrolici, si ottenne un cloridrato che dava le reazioni delle basi secondarie; si era dunque formata probabilmente della piperidina, ma certo in quantità così esigua da rendere impossibile ogni ulteriore ricerca. Il resto del liquido venne distillato frazionatamente; ne risultò così un piccolo residuo bollente fra 130-140° che conteneva ancora molta piridina. Da questo residuo, trattato con acqua, si separarono goccioline oleose; con gli acidi si ebbe la formazione di prodotti resinosi e col fuscello d'abete, la nota reazione cromatica dei pirroli.

Non vi ha dubbio perciò che la formazione dei prodotti pirrolici abbia luogo; ma in queste condizioni la quantità di essi è così esigua che non fu possibile ancora ricavarne dei prodotti analizzabili. Del resto, una volta constatato che il processo ha luogo, sia pure in lieve misura, non è improbabile che variando le condizioni d'esperienza o il catalizzatore, si possano ottenere risultati più soddisfacenti.

Esperienze con piperidina. — Impiegai della piperidina pura di Kahlbaum che bolliva a 106°. Seguii dapprima il metodo solito, facendola passare sul nickel a temperature varianti da 180 a 250°, insieme con poco idrogeno, destinato, come si è visto in altri casi, a mantenere desta l'attività del catalizzatore. Il prodotto ottenuto venne neutralizzato esattamente con acido cloridrico: si separarono in tal modo poche goccie oleose che vennero estratte con etere. L'estratto etereo conteneva piccole quantità di un prodotto di natura pirrolica analogo a quello ottenuto dalla piridina; ma anche qui la quantità ne era assai esigua e insufficiente per caratterizzarlo con precisione. La soluzione dei cloridrati venne trattata con nitrito sodico; si separò un nitrosoderivato che venne scomposto con zinco e acido cloridrico. Il prodotto basico così riottenuto era per la più gran parte piperidina rimasta inalterata.

Dalla soluzione acquosa, trattata con molta potassa, si separò un liquido di odore piridico: dopo averlo completamente disidratato, lo distillai frazionatamente. Ne risultò un prodotto bollente da 115 a 120° che fu caratterizzato per piridina a mezzo del picrato e del cloroaurato.

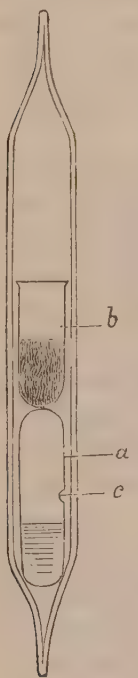
La piperidina viene dunque disidrogenata; tale trasformazione era stata già ottenuta con altri mezzi (1).

Piccole frazioni bollivano più alto e forse contenevano omologhi della piridina: si vedrà in seguito come si possa ammettere e spiegare la loro presenza.

Riflettendo che la piperidina contiene già da sè l'idrogeno necessario alle trasformazioni cercate, e nella persuasione che la pressione dovesse avere una influenza sulla qualità e sulla quantità dei prodotti, cercai di assogget-

(1) Ad esempio, per azione dell'acetato d'argento (Tafel, Berichte XXV, 1620).

tare quella sostanza all'azione del nickel a temperature elevate ed in ambiente chiuso. A tal uopo adottai la disposizione indicata dalla figura; un grosso tubo veniva affilato ad una estremità, poi vi si introduceva dall'altro lato una provetta *a* piena a metà di piperidina (circa 5 gr.), chiusa alle estremità e con un foro nel mezzo, per evitare la fuoruscita del liquido nelle operazioni seguenti.



Sopra la provetta *a* se ne poneva un'altra *b* contenente 2-3 gr. di nickel ridotto; dopo ciò si affilava l'estremità ancora aperta del tubo. Finalmente si chiudevano le due affilature alla lampada, dopo aver riempito il tubo con idrogeno, per evitare la presenza d'aria e conseguente ossidazione del nickel. I tubi così preparati venivano riscaldati a 270-280° per 16 ore circa, avendo cura di tenere leggermente inclinata la stufa verso l'estremità in cui si trovava la piperidina; in tal modo, durante il raffreddamento, il liquido si condensava lungo le pareti del tubo e andava ad accumularsi tutto nel fondo, senza mescolarsi affatto col nickel della provetta *b*.

Nei tubi, aperti dopo il riscaldamento, si riscontrò una forte pressione gassosa dovuta a grande quantità di *ammoniaca* e ad una miscela di gas combustibili a basso contenuto di carbonio (probabilmente idrogeno e metano). Il contenuto dei tubi era costituito da un olio basico in gran parte insolubile in acqua; esso venne appunto trattato con acqua per allontanare la piridina che anche in questo caso si era formata, poi seccato su potassa e senz'altro distillato frazionatamente.

Ottenni tre porzioni di cui la prima era ancora della piridina che non era stata estratta completamente dall'acqua. La seconda frazione, bollente da 170 a 220°, venne ulteriormente distillata e passò da 170 a 190°; era un olio incoloro, basico, non miscibile coll'acqua, di odore piperidinico. Ne ottenni un picrato cristallizzato (dall'alcool) in bei prismi gialli, che fondeva a 125°. L'analisi diede il seguente risultato:

	Calcolato per $C_{10}H_{21}N.C_6H_2(NO_2)_3OH$	Trovato
C	49.90	49.35
H	6.30	6.35
N	14.61	15.27

La base, riottenuta dal picrato, dà nitrosoderivato e la reazione di Liebermann; è dunque secondaria.

La sua composizione ed il fatto che nella reazione si svolge ammoniaca, fa pensare che si tratti di una piperidina sostituita ad un carbonio del nucleo con una catena laterale normale di 5 termini: $C_5H_9NH \cdot C_5H_{11}$.

La sua formazione si spiegherebbe nel modo più plausibile ammettendo che due molecole di piperidina si condensino, con eliminazione di una molecola di ammoniaca e conseguente apertura di uno dei nuclei; è verosimile che il residuo C_5H_{11} si unisca dapprima all'azoto per passare poi al carbonio. L'idrogeno occorrente per questa trasformazione della piperidina proviene dalla disidrogenazione di una parte di essa.

La terza frazione proveniente dalla distillazione frazionata passò quasi tutta poco sotto i 300°; ma quest'ultimo prodotto bolliva scomponendosi, a pressione ordinaria, e però in una preparazione successiva lo distillai a pressione ridotta: a 28 mm. bolliva a 175-180°. Questo prodotto è un olio denso insolubile in acqua, di odore analogo a quello della coniina; da esso ottenni un picrato che cristallizza da acqua e alcool in squamette lucenti, assai poco solubile a freddo in questi solventi e discretamente a caldo; il picrato fonde a 192-193°. L'analisi mi fece credere dapprima che si trattasse di una base $C_7H_{15}N$, che poteva essere una etilpiperidina. Senonchè il punto d'ebullizione assai elevato, ed il fatto che il mio prodotto non corrispondeva ad alcuna delle etilpiperidine (tutte note e caratterizzate), mi condussero ad ammettere la formula $C_{14}H_{28}N_2$. La differenza fra le composizioni corrispondenti alle due formule, derivante dalla quantità diversa d'idrogeno, non era tale da potersi apprezzare all'analisi:

	Calcolato per $C_{14}H_{28}N_2 \cdot [C_6H_2(NO_2)_3OH]_2$	Trovato
C	45.72	45.89
H	5.03	5.25
N	16.43	16.92

A maggiore conferma determinai il peso molecolare della base libera, sciogliendola in benzolo:

Concentrazioni	Abbassamento	Peso molecolare (K = 51)
0.843	0°.21	205
2.230	0. 53	215
	Calcolato per $C_{14}H_{28}N_2$ =	224 .

Della stessa base ho anche preparato il cloroaurato che cristallizza dall'alcool in cristalli foggiati a penna e fonde a 176-177° indecomposto; ed il cloroplatinato che annerisce sopra 200° e fonde scomponendosi a 230°.

La base, riottenuta dal picrato dà la reazione di Liebermann, ed è quindi almeno monosecondaria; non contiene poi alcun azoto primario.

Sulla costituzione di questa base sarebbe naturalmente azzardato fare delle ipotesi. Tuttavia, per le stesse ragioni dette a proposito dell'altra, si può pensare che sia costituita nel modo seguente:

$$C_5H_{10}N.CH_2.CH_2.CH_2.CH_2.C_5H_{10}N$$

cioè da due nuclei piperidinici attaccati all'estremità di una catena normale di 4 atomi di carbonio, in modo da lasciar libero almeno un azoto secondario.

È nota finora una sola base di analoga costituzione, che è però biterziaria, e cioè la tetrametilendipiperidina (1); questa base presenta caratteri non dissimili da quelli del prodotto da me ottenuto.

Le esperienze che ora ho esposto, dimostrano che l'azione del catalizzatore in ambiente chiuso può condurre a risultati assai diversi da quelli ottenuti in tubo aperto (2); questo mi preme sopratutto di far notare, intendendo di valermi della disposizione descritta per sperimentare l'azione dei metalli suddivisi su varie sostanze, e specialmente su quelle azotate che presentano le maggiori attitudini alle trasformazioni molecolari.

(1) Töhl, Berichte, XXVIII, 2218.

(2) Esperienze, anche assai recenti, di Ipatiew (vedi ad es. Berichte XL, 1270, 1281) vennero pure eseguite in tubi chiusi in presenza di idrogeno fortemente compresso, impiegando come catalizzatori vari metalli, e ultimamente anche ossido di nickel. Con tutto ciò, io credo e spero di poter continuare indisturbato le mie ricerche sui composti azotati, che vado facendo da oltre un anno, tanto più che il campo di studio sulle azioni catalitiche dei metalli, è assai vasto e permette una divisione di lavoro.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Nasini legge la seguente *Commemorazione* del Socio straniero Demetrio Mendeléeff:

Fra le eredità scientifiche più importanti che il secolo XIX lascia al secolo presente, certo quella che viene rappresentatata dall'opera del nostro illustre Socio Dimitri Ivanovitch Mendeléeff occupa un posto segnalatissimo. Egli fu uno di quelli uomini di genio che non solo operarono riforme, aprirono nuove vie ai lavoratori e ai pensatori, ma lasciarono anche a risolvere problemi altissimi, dopo averli maestrevolmente posti, suscitando alla risoluzione loro il più grande interesse, la più intensa curiosità.

Parlare a fondo dell'opera multiforme di questo gigante del pensiero non sarebbe facile cosa a farsi in tempo ristretto, e sarebbe del rimanente ardua assai, perchè una notevole parte della sua produzione scientifica è conosciuta solo nella lingua russa, e molta dell'attività sua si esplicò nel suo paese e fu rivolta, con grande successo, all'incremento dell'industria, alla generalizzazione della scienza, all'istruzione delle masse, in servizio delle istituzioni scientifiche e tecniche, cui egli appartenne. Onde io non dirò che delle principalissime cose che a lui dobbiamo, di quelle che hanno reso così grande il suo nome, ed alle quali principalmente deve la sua gloria, di quelle che più mi sembrano adatte a raffigurare la sua potenza mentale, l'efficacia e la portata dell'opera sua.

Nacque l'8 febbraio 1834 a Tobolsk. Mortogli il padre, insegnante nelle scuole classiche, quando egli era ancora giovanetto, quella forte donna che fu sua madre Maria Dimitrievna « per darlo alla scienza dalla Siberia lo portò a Mosca, spendendo le ultime forze e gli ultimi denari, e con molta fatica, dirigendo un'industria, potè educarlo, e lo educò coll'esempio e coll'amore »[1]. Si recò poi a Pietroburgo per studiare chimica sotto lo Zinin. Si dedicò da principio all'insegnamento secondario, dopo avere ottenuto il diploma relativo nell'istituto pedagogico e per qualche tempo insegnò a Simferopoli e a Odessa. E questo suo primo indirizzo didattico, pedagogico impresse senza dubbio un carattere peculiare alla sua futura produzione scientifica, determinando in un certo modo l'abito del suo pensiero. Ritornato poi a Pietroburgo e conseguita la laurea, ottenne una borsa di studio per perfezionarsi all'estero. Scelse come sede dei suoi studî Heidelberg, dove allora insegnavano il Bunsen e il Kirckhoff e che era il luogo più adatto per l'esplicazione delle sue

[1] Queste commoventi parole sono tolte dalla bella dedica che il Mendeléeff fa alla memoria della madre nel *Trattato delle soluzioni acquose.*

tendenze, del suo indirizzo così nettamente chimico fisico. Dico indirizzo chimico fisico, infatti il primo suo lavoro era stato di indole cristallografica, il secondo, col quale fu abilitato alla docenza, fu sui volumi specifici, ed il suo programma scientifico, al quale tutti i suoi lavori si ispirarono e che può riassumersi colle sue parole stesse, fu questo: « Se si parte dal principio che la causa delle trasformazioni chimiche risieda nelle proprietà fisiche e meccaniche delle molecole, bisogna sottoporre a uno studio completo tutti quei fenomeni nei quali queste proprietà si manifestano nel modo il più evidente. Così il peso specifico e via dicendo ». A Heidelberg lavorò in un laboratorio privato, e quivi pubblicò quelle sue importanti ricerche sulla coesione e sul calore specifico, ricerche che lo condussero nettamente al concetto della temperatura assoluta di ebullizione, come quella temperatura a cui la coesione diventa nulla, il calore di evaporazione nullo, in cui il liquido, qualunque sia la pressione, si trasforma in vapore, anticipando così di molti anni la scoperta fondamentale dell'Andrews sulla temperatura critica. Altri lavori interessanti dobbiamo al suo soggiorno in Heidelberg, così quello sulla dilatazione dei liquidi, che, ripreso da lui molti anni dopo, gli permise di stabilire la formula del modulo di dilatazione, formula che rimane sempre la più semplice per esprimere il fenomeno e sulla quale ancora nuovi lavori si desiderano e si invocano. Tornato a Pietroburgo si dedicò all'insegnamento superiore e pubblicò il mirabile trattato di chimica organica, mentre maturava nella sua mente un profondo studio di tutto quello che si sapeva sulla natura degli elementi e delle loro combinazioni. Alla grande sintesi che va col suo nome egli giunse sforzandosi sopra tutto di render chiara, nel trattato di chimica generale che stava preparando, la classificazione degli elementi e di mettere bene in evidenza le loro analogie, quelle dei loro composti. Egli stesso ci dice nella Faraday Lecture quali furono i fattori principali del suo sistema. Primo il congresso di Karlsruhe, nel quale la riforma cannizzariana trionfò di tutte le opposizioni, ed esposta con giovanile baldanza e galileiana chiarezza dal grande maestro, illuminò la sua mente, già mirabilmente pronta a farla sua. Questo io dico perchè il Mendeléeff in una delle tesi da lui proposte alla discussione per ottenere il diploma sosteneva « la molecola allo stato aeriforme occupa due volumi, se 100 parti di ossigeno occupano un volume. La molecola dell'ossigeno è O_2, dello zolfo S_6, dell'idrogeno H_2, dell'azoto N_2, dell'arsenico As_4, del forsforo P_4, dell'alcool $\begin{matrix} C_2H_5 \\ H \end{matrix}\Big\} O$, dell'etere $\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\Big\} O$, dell'acido acetico $\begin{matrix} C_2H_3O \\ H \end{matrix}\Big\} O$, della sua anidride o ossido di acetile $\begin{matrix} C_2H_3O \\ C_2H_3O \end{matrix}\Big\} O$ e così via. Una gran parte degli equivalenti del Berzelius debbono essere portati a metà ». Secondo fattore furono le ricerche che avevano preceduto la sua classificazione, quelle in specie del Gladstone, del Pettenkofer e del Dumas e finalmente poi l'intensificarsi dei

lavori sugli elementi rari. Tutto questo certo non avrebbe a nulla valso, come a poco aveva valso sino allora, senza la profonda, sintetica sua mente, aiutata da una rara conoscenza dell'argomento, sia nelle sue grandi linee, sia nei suoi più minuti particolari.

Non è questa l'occasione per fare la storia del sistema periodico, per mostrare di quanto esso si allontana da tutti i tentativi fatti sino a quel punto in un indirizzo, che a prima vista, può sembrare analogo. Questa storia fu narrata in modo inarrivabile dal compianto collega nostro, il prof. Augusto Piccini, il quale nella Nuova Enciclopedia Chimica del Guareschi espose, completamente, e ispirandosi alla critica la più severa ed imparziale, tutto quanto riguarda l'argomento. Se il Newlands e il Chancourtois, senza parlare degli altri, hanno emesso alcune idee che ritroviamo poi nella grande opera del Mendeléeff, certo nessuno, nemmeno Lothar Meyer, che pure del sistema stesso fu valentissimo espositore, continuatore e illustratore, specie dal punto di vista chimico fisico, nessuno, ripeto, dal lato chimico si può ragguagliare al Mendeléeff. A lui solo si deve d'avere ben stabilito le analogie e le dissimiglianze fra tutti gli elementi, di aver posto chiaro il concetto di analogia, di avere scoperte, svelate le più piccole somiglianze tra elementi disparatissimi e di avere tratto dalla sua sintesi potente tutto quello che poteva trarsi, giungendo a quelle previsioni, che verificatesi in modo che parve quasi taumaturgico, vinsero tutti i dubbî, trionfarono di tutte le opposizioni. Ben disse il Piccini: se domani si scoprisse falso il concetto della periodicità, nulla resterebbe dell'opera degli altri, intatto invece rimarrebbe tutto quello che stabilì il Mendeléeff. E questo va detto poi per coloro che pretesero di modificare lo schema primitivo, non facendo più della chimica, ma degli ingegnosi giuochi matematici.

Pubblicò la sua Memoria nel 1869. Nel 1871 con grande difficoltà e solo per l'autorità del Volhard la traduzione tedesca fu accettata negli Annali del Liebig e restò ignorata o quasi. Nè è da meravigliare. Si era già allora in quel periodo della nostra scienza — e non della nostra sola — in cui signoreggiava l'idolatria del fatto, del piccolo fatto, e si dava molto maggior peso alla preparazione di un nuovo sale, di un nuovo e inutile etere, al ritrovarsi di una nuova e superflua reazione, che non all'enunciazione di un'idea ardita e geniale, che non a una poderosa coordinazione! Tendenza e idolatria che se da un lato permise — e permette ancora — di adire alla scienza e di acquistare nome di scienziato a chi per la mentalità sua dalla scienza sarebbe stato in altri tempi, e dovrebbe essere, duramente respinto, ha anche portato con sè l'accumularsi di tanti dati sperimentali che poi la scienza vera ha utilizzato o utilizzerà

Nel 1875 fu scoperto il gallio dal Lecocq di Boisbaudren: con meraviglia, con stupore si constatò che aveva tutte le proprietà di uno degli elementi previsti dal Mendeléeff. Si susseguì la scoperta dello scandio ed allora

il Mendeléeff dall'oscurità, quasi, divenne famoso. Il suo sistema che non era stato accettato, credo, che dal Roscoe, dal Bunsen studiato, ma quasi di nascosto, occupò trionfalmente il suo posto. Seguì la scoperta del germanio: tutta la chimica inorganica si orientò nell'indirizzo che la classificazione in tante e tante direzioni suggeriva. Da quel tempo può dirsi che essa è stata l'ispiratrice, la direttrice di presso che tutti i lavori nella chimica organica.

Certo le obiezioni contro il sistema vi furono e vi sono: alcune non si sono vinte, nè si prevede con sicurezza che possano vincersi. Principalissima fra tutte quella che riguarda il tellurio, il cui peso atomico previsto prima dal Mendeléeff a 125, poi a 127, ad ogni modo inferiore a quello del jodio, si ostina invece a restare a questo superiore, non ostante tutti i lavori che si sono fatti e si fanno su questo elemento. Questa è la più grande prova del valore immenso che tutti attribuiscono al sistema. Non vi è chimico che non sia intimamente persuaso che quel peso atomico deve cambiare, che è quasi impossibile che possa restare superiore a quello del jodio: mai nessuna teoria ha provocato così grande ostinazione da non voler quasi credere all'evidenza dei fatti!

La scoperta dell'argo e degli altri gas inerti fatta da Sir William Ramsay parve mettesse in pericolo il sistema: certo si scoprirono elementi che in nessun modo erano stati previsti e che dal sistema non erano prevedibili. Si divisero le opinioni: chi ritenne che essendo il sistema fondato anche sulla forma di combinazione, in esso non potessero rientrare elementi che non avevano la facoltà di dare combinazioni; di questa opinione era il Piccini, sopra tutti competentissimo, e, modestamente, anch'io. Non così la pensò il grande autore del sistema stesso, e molti altri con lui, e volle fare un nuovo gruppo, il gruppo O, ossia degli elementi inattivi, che precede il gruppo primo, con due sottogruppi, come gli altri. Non vi è dubbio che gli elementi inerti così trovano qualitativamente il loro posto, e di alcuni di essi si poteva in tal modo prevedere l'esistenza, di altri ancor si prevede: nel suo insieme la classificazione resta integrata e per ogni gruppo altri elementi potrebbero anche presupporsi, e, secondo il Mendeléeff, più verosimilmente degli altri nel gruppo 7°, un alogeno col peso atomico di 3. Nel nuovo sistema tra gli elementi da scoprirsi nel gruppo O vi sarebbe il coronio col peso atomico di non più che 0,4 e un elemento leggerissimo, col peso atomico di circa un milionesimo di quello dell'idrogeno, elemento che rappresenterebbe l'etere cosmico ed a cui propose il nome di newtonio; ma di ciò dirò dopo.

Certo è però che il Mendeléeff ha dovuto attribuire ad alcuni dei gas inerti dei pesi atomici diversi da quelli sin qui trovati, e non vi ha dubbio mi sembra che, se realmente tanto il tellurio quanto i gas inerti conservano il peso atomico attuale, pur non restando scossa nei suoi fondamenti l'opera grande del Mendeléeff, il concetto della peridiocità non potrebbe conservarsi intatto nel suo significato preciso, non ostante le ingegnose argomentazioni

di Sir William Ramsay; ed un altro sistema si dovrebbe invocare che, tenendo conto dei nuovi fatti, conservasse tutto quello che il primitivo schema aveva ed ha in sè di vero e di fecondo. L'avvenire ci dirà su questa grande questione, come pure su altre di minore importanza, ma che pure un poco attaccano la compagine primitiva, come l'esistenza di tanti elementi nel gruppo delle terre rare, la questione del nichel e del cobalto e altre ancor meno rilevanti.

Il sistema del Mendeléeff in riguardo alla scienza italiana è degno di esser considerato sotto speciale riguardo. Innanzi tutto, come egli stesso dichiarò, fu la riforma cannizzariana, esposta nel congresso di Karlsruhe, uno dei principali fattori che permisero alle sue idee di orientarsi verso la grande sintesi. Inoltre, è fuori di dubbio che un necessario completamento al sistema lo si deve a un italiano, al nostro indimenticabile collega Augusto Piccini.

In Italia le idee del Mendeléeff si cominciarono a considerare seriamente verso il 1878 per eccitamento del Cannizzaro, qui nell'Istituto chimico di Roma, e si dedicarono al suo studio il Mauro e il Piccini, che intrapresero ricerche interessanti sopra alcuni elementi rari. Ed al Piccini dobbiamo, come ho accennato, un'integrazione necessaria alla classificazione. L'esistenza dei perossidi costituiva una delle più grandi eccezioni, giacchè molti elementi venivano a trovarsi in gruppi caratterizzati da una forma limite diversa da quella massima a cui essi potevano realmente dar luogo: sino a che fu lecito ritenere che questi ossidi superiori non fossero generatori di sali, tutto poteva spiegarsi, ma una volta riconosciuto che anche essi potevano darli, l'obiezione si presentava gravissima, direi quasi insormontabile. Ed è appunto merito del Piccini, di cui il Mendeléeff ebbe altissima stima, se si potè dimostrare il peculiare carattere di questi perossidi, in modo da poterli sempre diagnosticare, distinguere dai veri ossidi limiti e se si potè dare anche una spiegazione della loro natura, in modo che il principio dell'ossido limite che determina la natura del gruppo, in nessun modo fosse scosso e intaccato. Sempre in relazione col paese nostro debbo anche aggiungere che prima che uscisse la traduzione francese della Memoria del Mendeléeff, traduzione che tanto giovò alla sua generale conoscenza, si era cominciato a pubblicarla tradotta in italiano. Il prof. Paolo Tassinari dopo il 1875, cioè subito dopo la scoperta del gallio, aveva eccitato alla traduzione della Memoria, dall'originale russo, il giovane studente del suo laboratorio, Alessio Alessi, attualmente professore di chimica nell'istituto tecnico di Reggio Emilia, siccome pratico della lingua russa, essendo nato a Mosca da madre russa; l'Alessi fece la traduzione e ottenne dal Mendeléeff, con una gentilissima lettera, il permesso di pubblicarla: ma la cosa non era semplice e solo dopo molte ripulse il Monitore dei Farmacisti, che si stampava a Milano, accettò di stamparla: la stampava ogni tanto, a una pagina per volta con una quantità spaventevole di errori tipografici, cosicchè, venuta fuori in

quel mentre la traduzione francese, l'Alessi interruppe senz'altro la pubblicazione della sua.

Non credo privo di interesse l'esporre quali furono le idee del Mendeléeff sopra alcune questioni di alta importanza per la scienza, e intorno alle quali si agita vivo il dibattito. Egli fu atomista convinto. Pure assegnando ai concetti di peso atomico e di peso molecolare, seguendo il pensiero del Cannizzaro, un valore indipendente dalla teoria onde erano stati originati, egli riconobbe in quella atomica molecolare un validissimo aiuto per la comprensione delle leggi fondamentali della chimica, specialmente per quella degli equivalenti, che, secondo egli si esprime, risulta chiara, evidente, necessaria in base all'ipotesi atomica e che male si potrebbe comprendere all'infuori di essa. Ciò non ostante egli seguì le idee bertholettiane, in quanto riguardano le soluzioni: nelle soluzioni volle vedere solo combinazioni più labili, ma combinazioni della stessa natura di quelle vere e proprie rappresentate dalle specie chimiche, che sono originate dalla affinità chimica.

Alludendo alle soluzioni e parlando in genere delle combinazioni a proporzioni non definite così egli si esprime: « Le combinazioni chimiche formate secondo determinate proporzioni non rappresentano che un caso speciale di quelle che si formano in proporzioni non definite, ed uno studio accurato di queste ultime potrà essere di grande aiuto per le considerazioni teoriche su tutto l'insieme delle conoscenze chimiche ». Non par qui di sentire il Guldberg prima e poi, più recentemente, l'Ostwald e il Wald? Egli anzi fu propenso a riguardare come veri composti chimici gli acidi in soluzione acquosa bollenti a temperatura fissa, gli acidi del Roscoe diremo, e della loro variabilità di composizione col variare della pressione dette una spiegazione assai ingegnosa e contro alla quale, che io sappia, nulla si è obbiettato. Seguendo queste sue idee egli espose la elegante teoria delle variazioni del quoziente differenziale $\frac{ds}{dp}$ in funzione del percentuale delle soluzioni, giungendo a stabilire l'esistenza di varie combinazioni della sostanza disciolta col solvente, dalle curve differenti che si hanno, dal brusco passaggio di una curva in un'altra. Pubblicò la sua Memoria nel 1887, nell'anno che segnò il trionfo dell'attuale chimica fisica, quando comparvero la teoria delle soluzioni diluite del Van't Hoff, quella della dissociazione elettrolitica dell'Arrhenius, e le considerazioni e gli sviluppi geniali dell'Ostwald. La teoria del Mendeléeff, che urtava apparentemente contro le idee in quel momento dominanti, le quali sopra tutto erano applicabili alle soluzioni diluite, trovò l'opposizione dell' Ostwald e della sua scuola perchè contradiceva a quel principio a cui tanto allora si stava attaccati, che ci fosse perfetta continuità fra la soluzione ideale, il miscuglio fisico, e la combinazione, e che nessun passaggio brusco nelle proprietà fisiche accennasse alla formazione di composti. Aggiungasi poi che, ricalcolati per parte dell'Arrhenius i valori

del Mendeléeff, si trovò minore discontinuità nelle curve e si credette che nulla ci fosse di vero, ma invece non si tratta che di modificazioni le quali, a mio parere, non intaccano il concetto e le deduzioni fondamentali.

Alla distanza di quindici anni il riprendersi dello studio delle soluzioni, anche concentrate, con metodi di indagine chimica fisica hanno mostrato che realmente esistono dei composti in soluzione, delle combinazioni col solvente, onde le idee del Mendeléeff su questo argomento non solo ci appaiono freschissime, ma troviamo le sue previsioni, anche in questo campo, perfettamente giustificate.

Il Mendeléeff ebbe mente in alto grado filosofica. Si vantò realista, avverso così ai materialisti come agli spiritualisti, e fu il suo un realismo psicologico. La materia, l'energia, lo spirito considerò come tre categorie distinte, l'una non pensabile senza l'altra, ma l'una nell'altra non riducibile. Sebbene, secondo l'opinione generalmeote invalsa, e secondo anche la geniale interpretazione del Crookes nella sua genesi degli elementi, il sistema sembri condurre ad ammettere l'unità della materia, una materia primordiale da cui tutti gli elementi sarebbero costituiti, egli fu sempre contrario a tale conclusione: egli riguardò gli elementi come entità esistenti *ab aeterno* e l'uno nell'altro non convertibili, e, fedele al concetto di atomo, mai volle ammettere che esso potesse scindersi. Così fu anche contrario alla teoria degli elettroni e alle recenti ipotesi che la radioattività spiegano come disintegrazione dell'atomo e che ammettono la trasformazione di un elemento nell'altro.

Nel suo ultimo lavoro: *Tentativi di una interpretazione chimica dell'etere cosmico*, che è quasi il suo testamento scientifico filosofico, il Mendeléeff ammette che l'etere cosmico altro non sia che il più leggero degli elementi; ad esso attribuisce un peso atomico di circa un milionesimo di quello dell'idrogeno e gli fa occupare il solo posto disponibile nella serie O del gruppo O. Ritiene che i fenomeni della radioattività si spieghino ammettendo che l'etere sopra certi elementi a peso atomico molto elevato si condensi, e da questi venga emesso, all'etere attribuendo un comportamento perfettamente analogo a quello dei gas inerti che si condensano, ma non si uniscono cogli altri elementi, formano cioè con essi in altri termini delle combinazioni instabilissime: e come l'elio passa facilmente a traverso certe pareti, a quelle di quarzo ad esempio, così l'etere possiede in sommo grado questa proprietà e per esso tutti i corpi sono permeabili.

Interessante Memoria questa del Mendeléeff! Egli dice che da molto tempo aveva in mente simile concezione chimica dell'etere cosmico, ma solo la scoperta dei gas inerti in essa lo rafforzò: e poi non poteva più oltre tardare ad esporre le sue idee, perchè aveva ormai troppo pochi anni innanzi a sè per rifletterci ancora e provarle sperimentalmente. E mostra il suo stato di animo, diverso da quello in cui si trovava quando esponeva il sistema

e prevedeva l'esistenza di elementi nuovi: allora tutto gli appariva chiaro ed aveva la certezza che tutto quanto prevedeva si sarebbe verificato; ora questa certezza gli mancava: allora non rischiava nulla, ora sentiva di rischiare e si augurava che altri potessero completare le sue idee dove erano manchevoli, e giungere a conclusioni più sicure di quelle che al suo sguardo indebolito apparivano nondimeno possibili. Pure ammirando la profondità delle speculazioni e dei calcoli del Mendeléeff, non può negarsi che molte obiezioni si presentano alla mente riguardo alle sue conclusioni finali, specie se la questione si considera dal lato fisico.

Ammirò la teoria delle soluzioni del Van't Hoff, sebbene tacitamente le rimproverasse di essere di indole troppo fisica: quanto a quella della dissociazione elettrolitica, pur riconoscendo in essa molte cose giuste, sperava che un'altra teoria più generale potesse dar conto di tutti i fenomenti che si riferiscono alle soluzioni, anche alle concentrate, il che non fa quella dell'Arrhenius.

Al Mendeléeff l'esperienza servì per la dimostrazione di quello che dalle esperienze degli altri e dalla sua profonda meditazione era stato condotto ad ammettere, a divinare. Sebbene, a quanto si afferma, e come varî suoi lavori dimostrano, tra gli altri quelli sui gas e sui pesi specifici delle soluzioni, egli fosse sperimentatore ingegnoso, abilissimo ed esatto, pure non esperimentò mai senza che l'esperienza gli servisse ad un determinato fine; non lavorò mai per lavorare e si guardò bene, come dice il Walden, di preparare nemmeno un nuovo composto. Della sua mente filosofica e delle sue larghe vedute fanno fede le sue pubblicazioni tutte, e principalmente il suo trattato; trattato meraviglioso, originale, di lettura così attraente come pochi, e pieno di mille ineguaglianze, di alcune apparenti puerilità e ingenuità che rivelano in modo mirabile l'uomo che egli era. Nessun trattato nella nostra scienza è così chimico, mi si permetta di dire, come quello di Lui, pur nessuna parte della chimica fisica essendo in esso trascurata. Ho sempre pensato che l'indirizzo dato dal Mendeléeff è rimasto isolato — eccezion fatta per coloro che lavorano in chimica inorganica — ed anche i principî informatori del suo sistema non sono penetrati abbastanza addentro nella maggior parte dei trattati moderni, in alcuni dei quali, pur pregevoli per tanti riguardi, la classificazione è relegata in poche pagine, invece di costituire il pernio di tutta l'esposizione. Un libro in cui si fondessero insieme le idee, l'indirizzo e le profonde speculazioni chimiche del Mendeléeff con i geniali concetti che dalla chimica fisica attuale si è plasmati l'Ostwald, certo sarebbe il trattato che tutti desiderano e che ancora siamo lungi dal possedere.

In pochi uomini come nel Mendeléeff rifulse dall'aspetto l'intelligenza ed il genio. I suoi capelli inanellati, l'espressione potente della turgida bocca,

la vivacità e insieme la dolcezza degli occhi, l'alta statura davano a chiunque lo vedeva l'impressione dell'uomo veramente grande. E avvicinandolo, questa impressione non sminuiva. Ricordo quando lo conobbi a Londra, in quell'anno in cui egli venne per tenere la Faraday Lecture, nel giugno 1889, ammirato, festeggiato da tutti, nel pieno fulgore della sua gloria. E lo ricordo la mattina di una di quelle domeniche londinesi, che tanto invitano colla loro pace alla meditazione e agli amichevoli parlari: era con noi quegli che fu, insieme col nostro Piccini, il migliore interprete dell'opera sua, il prof. Bohuslav Brauner, e tutta la mattina passammo nella sala di lettura dell'albergo in cui eravamo alloggiati. Con indicibile commozione ed orgoglio sentii da lui in quale alto concetto aveva l'opera del mio caro Piccini e ricordo poi con quanta energia, con quanta vivacità, con quanta chiarezza ci esponesse la sua idea, tante volte sostenuta, che il sistema in nessun modo spingeva a ritenere l'unità della materia. Che fosforescenza di immagini, che meravigliosa conoscenza di ogni ramo della nostra scienza, quanti spirituali aneddoti, quali spiritose descrizioni! Il Brauner gli faceva intravedere quello che si preparava ad esporre poche sere dopo sul tellurio alla Chemical Society, quando credeva di aver trovato l'altro elemento che ne alzava il peso atomico: ogni tanto il grande maestro, acceso in viso e agitato, si levava dalla sedia e si gettava nelle braccia dello scolaro, non meno di lui entusiasta, per la commozione intensa che il ragionare dell'opera sua prediletta gli infondeva nell'animo.

In Russia Mendeléeff fu più che un chimico, fu anche un educatore: dalla gioventù fu idolatrato. Il suo governo non potè avversarlo, e, secondo quello che dice un suo biografo, il Thorpe, temendo le sue idee e la sua azione sopra gli studenti, trovava spesso il modo di inviarlo in onorifiche missioni all'estero. Negli ultimi tempi si era posto in disparte, e parve forse meno liberale di quello che per il passato si era ritenuto. Tristi pensieri, non confortati di speranze, gli suscitavano le vicende che tribolano da anni quel grande paese.

Dell'opera sua molto resta, non solo per quel tanto che da essa è scaturito, ma anche per quel moltissimo che essa può e deve dare. Molti e molti anni correranno prima che dal sistema periodico si sia passati ad un'altra forma più completa in cui esso sia racchiuso e scompaia. Per ora è sempre il sistema mendeléeffiano che spinge, che dà l'indirizzo alle ricerche di chimica inorganica: i problemi che il Mendeléeff ha posto sono tra quelli alla cui soluzione siamo maggiormente interessati: le idee sue sulle soluzioni cominciano a trionfare adesso e l'avvenire ci dirà se anche nella concezione dell'etere cosmico egli sia stato — come tale è stato in altri campi — profeta meraviglioso.

Sulla sua tomba nella lapide sepolcrale è inciso il suo nome e la riproduzione del suo sistema e null'altro. Più grande omaggio non poteva rendersi alla sua memoria!

Portato a braccio dai giovani che si avviano alla scienza, migliaia di persone accompagnarono al cimitero di Wolkowo il feretro del grande pensatore, dolorando per la perdita irreparabile che colpiva la patria russa. Con esse era il cuore di tutti quanti nel mondo civile conobbero e ammirarono la potente e geniale opera sua!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni pervenute in dono, segnalando quelle dei soci Bassani, Lustig, Pascal, Berthelot, Pickering. Fa inoltre particolare menzione di un volume intitolato: *Sulla distribuzione della pioggia nei possessi neerlandesi*; di una *Relazione* dell'ing. E. Mancini sulle macchine frigorifere presentate all'Esposizione di Milano; e di due pubblicazioni del Ministero delle Finanze aventi per titolo: *Movimento della navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1905*; *Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1905.*

Il Socio Röiti fa omaggio del vol. 3°, p. I, IV^{ta} ed: dei suoi *Elementi di Fisica.*

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un invito della Società geologica di Londra, che celebrerà nel venturo settembre il primo centenario della sua fondazione; e pone a disposizione dei Soci un bollettino di sottoscrizione trasmesso dal Museo di storia naturale di Parigi, per l'erezione di un monumento a Lamark.

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società Reale di Vittoria; la Società Reale delle scienze di Upsala; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la Società zoologica di Tokyo; il Museo di scienze ed arti di Filadelfia; il Museo di storia naturale di Nuova York; l'Osservatorio di San Fernando; l'Università di Manchester.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 maggio 1907.

Achiardi G. d' — Considerazioni critiche sulla origine dell'acido borico nei soffioni boriferi della Toscana. (dagli « Atti della Soc. Toscana di Scienze Naturali ». Memorie. Vol. XXIII). Pisa, 1907. 8°.

Adhemar R. d' — Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. (*Scientia*, n. 29). Paris, 1907.

Agamennone G. — Sopra un sismoscopio destinato ai terremoti lontani. Modena, 1906. 8°.

Ardizzone F. — Materia e forza. Note di Filosofia Naturale. Milano, 1907. 8°.

Baschieri E. — Studio sulla costituzione delle zeoliti. Pisa, 1907. 8°. (« Proc. verb. della Soc. Toscana di Scienze Nat. » Adun. 3 marzo 1907). Pisa, 1907. 8°.

Bassani F. — Di una nuova piccola bocca nel fondo della Solfatara di Pozzuoli con alcune considerazioni sulla opportunità di uno studio sistematico di questo cratere e dei lenti movimenti del suolo presso il Serapeo. (dal « Rend. della R. Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli ». Fasc. 3°, 1907). s. l. ed. 8ª.

Berthelot M. — Traité pratique de l'analyse des gaz, avec 109 figures. Paris, 1906. 8°.

Bureau central de l'Association géodésique internationale. Rapport sur les Travaux du Bureau central de l'Ass. géod. internat. en 1906 et programme des Travaux pour l'exercice de 1907. Leyde, 1907. 8°.

Calò B. — Sopra una classe di superficie spirali e sulle superficie che hanno un sistema di linee assintotiche a torsione costante. Napoli, 1907. 8°.

Donder T. de. — Sur les formes différentielles m-linéaires. (« Rend. della R. Accad. dei Lincei ». Classe di scienze fis. mat. e nat. Vol. XVI, 1° sem. serie 5ª, fasc. 5°). Roma, 1907. 8°.

Eck J. J. van — De bepaling Natuurlijke Ventilatie. Leiden, 1906. 8°.

Hepites St. C. — Analele pentru sismografia românei. XII. Seismele din anul 1905 st. u. (Extras din Analele Acad. Rom. Serie II. T. XXVIII). Bucaresti, 1906. 8°.

Hepites S. C. — Climatologia Bucuresteana. Anul 1902-1903 st. n. 8, 9. (Extras dis Anuarul statist. al Capitalei 1902, 1903). Bucaresti, 1906. 8°.

Huygen F. C. — Over de exhaust-Werking bij locomotieven. Bijlagen I-IV. Rotterdam, 1907. 8°.

Institut de France. Académie des sciences et Académie des sciences morales et politiques. Propositions et Rapport présentés conjointement avec l'Académie royale des sciences de Berlin à l'Assemblée générale de l'Association internationale des Académies qui doit se tenir à Vienne en 1907. Paris, s. a. 4°.

Isaac É. — Memoire sur l'intégration de l'équation algébrique et différentielle $F(x, y)\,dy + F_1(x, y)\,dx = 0$. Mesny, 1907. 4°. (lit.).

Leonardi G. — Contribuzione alla conoscenza delle cocciniglie italiane. (dal « Boll. del Labor. di zoologia gen. e agr. » R. Scuola Superiore d'Agric. di Portici). Portici, 1907. 8°.

Leonardi G. — Notizie sopra alcune cocciniglie dell'isola di Giava, raccolte dal prof. O. Penzig. (dagli « Annali della R. Scuola Sup. d'Agric. di Portici ». Vol. VII). Portici, 1907, 8°.

Leonardi G. — Notizie sopra una cocciniglia degli agrumi nuova per l'Italia (*Aonidiella aurantii* Mask). (dal « Boll. del Labor. di Zoolog. gen. e agraria ».

R. Scuola Super. d'Agric. Portici. Marzo 1907). Portici, 1907. 8°.

Lustig A. — Le malattie ereditarie e la loro profilassi sociale. (dal « Ramazzini » Giornale italiano di medicina sociale. Anno I. Fasc. 2. Firenze, 1907, 8°.

Lustig A. — Le condizioni igieniche delle scuole elementari di alcune provincie del Regno d'Italia. (Sonderubd. aus « Intern. Archiv. für Schulygiene ». III. R.-3. H.). Leipzig, 1907. 8°.

Lustig A. — Sui nucleoproteidi bacterici e loro proprietà immunizzanti. (dallo « Sperimentale » Arch. di Biol. norm. e patol. Anno I-XI, fasc. III). Firenze, 1907. 8°.

Lustig A. — Sulle condizioni igieniche delle scuole secondarie (ginnasi, licei, scuole tecniche, istituti tecnici, ecc.) d'Italia. Relazione. s. l. ed a. 8°.

Mancini E. — Le macchine frigorifiche presentate alla Esposizione internazionale di Milano nel 1906. Relazione. (dal « Boll. Uff. del Ministero di agr., ind. e comm. » Anno VI, vol. I, fasc. 8). Roma, 1907. 8°.

Mayrhofer B. — Zwei etwas modifizierte Anvendungsweisen der v. Mosetigschen Knochenplombe. (Separatabd. aus der Wiener klinisch. Wochenschrift XVIII Jahrg. 1905. N. 15). Wien, 1905.

Meyer M. — Ein Beitrag zur Behandlung der Lungenentzündung. (Sonder-Abdruck aus der Deutschen Aerzte-Zeitung. H. 7).

Pascal E. — I determinanti ricorrenti e i nuovi numeri pseudo-Euleriani. (dai « Rend. » del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. Serie II. Vol. XL). Milano, 1907. 8°.

Pascal E. — Necrologia di Ernesto Cesàro. (dal « Bull. dell'Ass. Naz. tra i Professori Univ. » Anno II, n. 1-2, 1907). Pisa, 1907. 8°.

Pickering E. C. — An international southern Telescope (from the « Proceed. of the Amer. Philos. Society ». XLV, 182). Lancaster, 1906. 8°.

Pickering E. C. — Oration on the Aims of an astronomer delivered in Sanders Theatre, June 28, 1906, before the Harvard Chepter of Phi Beta Kappa (from the « Harvard Graduates' Magazin, XV, 59). s. l. 1906. 8°.

Reijst J. J. — Het kokosvet. Bijdrage tot de Kennis der vetten en vetzuren. Leiden, 1905. 8°.

Roiti A. — Elementi di Fisica. Quarta ed. Vol. terzo. Parte prima. Firenze, 1906. 8°.

See T. J. — The cause of earthquakes, mountain formation and kindred phenomena connected with the physics of the Earth (from Proceed. Amer. Philos. Society. XLV. 1907).

Valenti G. — Canale utero-vaginale in rapporto con genitali maschili normalmente sviluppati (R. Accad. delle Scienze di Bologna. Tomo IV. (S. VI.) delle « Memorie »). Bologna, 1907. 4°.

Verwey A. — Cornea en Iristuberkulose. Leiden, 1906. 8°.

E. M.